



Modélisation des champs réverbérés inhomogènes au sein du modèle de diffusion : approche statistique

Cédric Foy
Cerema

• PLAN

I Modèle de diffusion acoustique : cas des champs réverbérés inhomogènes

II Analyse statistique multivariée : modèle linéaire

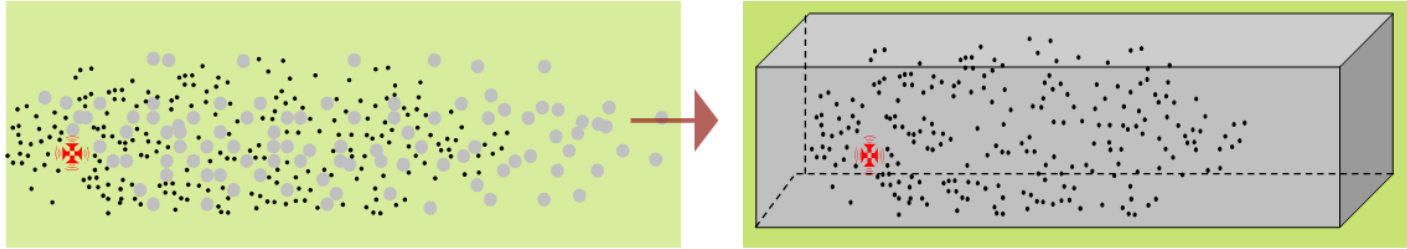
III Estimation de la loi *via* l'analyse statistique

IV Conclusion et perspectives

I Modèle de diffusion acoustique

Cas limite des champs réverbérés inhomogènes

Modèle de diffusion acoustique et limites



- Equation de Transport
- Champ localement quasi-isotropique : passage de l'équation de transport à une équation de diffusion et à une équation de gradient plus simples
- L'équation de diffusion pour la densité d'énergie acoustique

$$\frac{\partial w(\vec{r}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (D(\vec{r}) \vec{\nabla} w(\vec{r}, t)) = 0$$

$$-D(\vec{r}) \frac{\partial w(\vec{r}, t)}{\partial n} = \frac{c \alpha}{4} w(\vec{r}, t)$$

n normale paroi

Modèle de
diffusion
acoustique

Modèle de diffusion acoustique et limites

- Equation de gradient pour l'intensité acoustique

$$\vec{I}(\vec{r}, t) = -D(\vec{r}) \vec{\nabla} w(\vec{r}, t)$$

- Adaptation au cas de salles de dimensions homogènes avec des parois diffuses

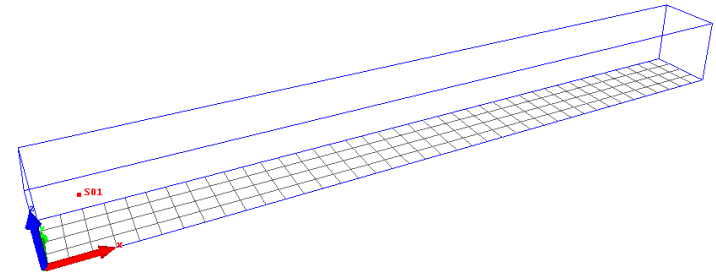
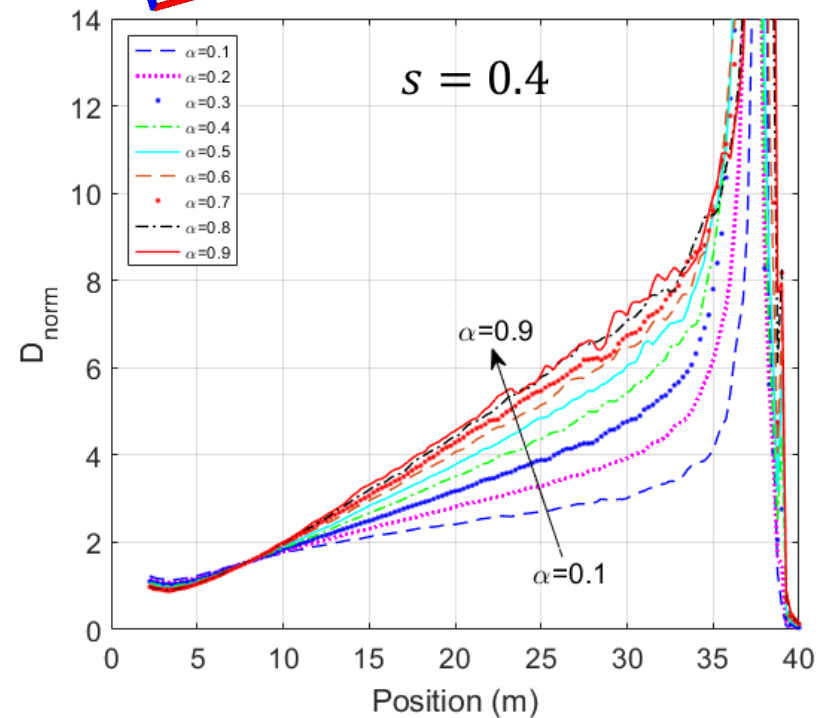
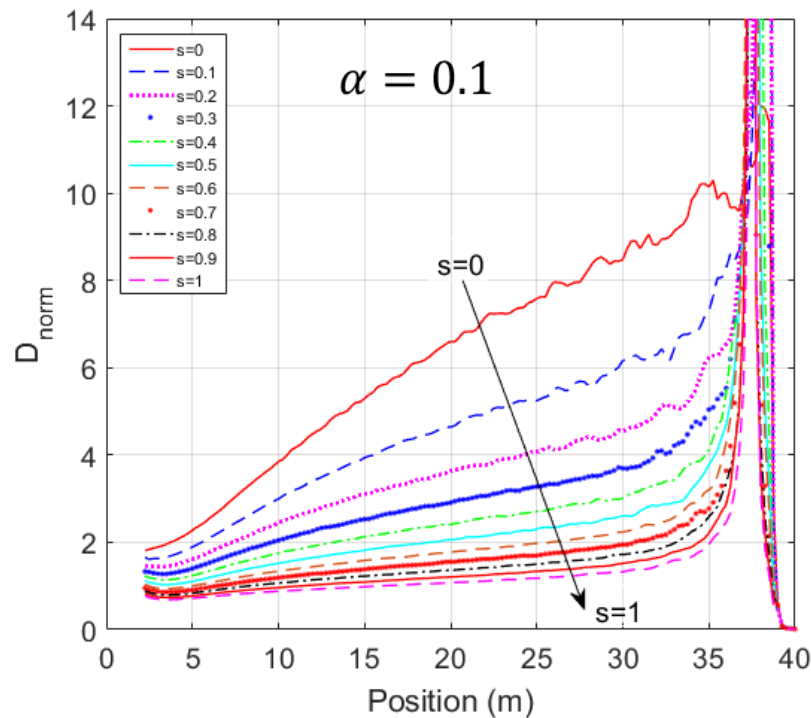
$$D(\vec{r}) = \frac{c}{3} \frac{4V}{S} \quad \left\{ \begin{array}{ll} V & \text{volume de la salle} \\ S & \text{enveloppe de la salle} \\ c & \text{vitesse du son} \end{array} \right.$$

- Estimation du coefficient de diffusion par une approche de tir de particules

$$D(\vec{r}) = \frac{\|\vec{\nabla} w(\vec{r}, t)\|}{\|\vec{I}(\vec{r}, t)\|}$$

Modèle de diffusion acoustique et limites

- Cas des locaux de forme allongée



Recherche d'une loi $D(x, \alpha, s)$

II Analyse statistique multivariée

Analyse statistique multivariée

- $D(\alpha, s, x)$: Loi empirique de D fonction de l'absorption α , de la diffusivité s et de la distance x source-récepteur
- Hypothèse d'une loi linéaire

$$[D] = [X] [\beta] + [U]$$

$[D]$ Vecteur de dimension m de la variable à expliquer

$[X]$ Matrice $[m,k]$ des variables explicatives

$[\beta]$ Vecteur des coefficients inconnus de dimension k

$[U]$ Vecteur des erreurs de dimension m

Analyse statistique multivariée

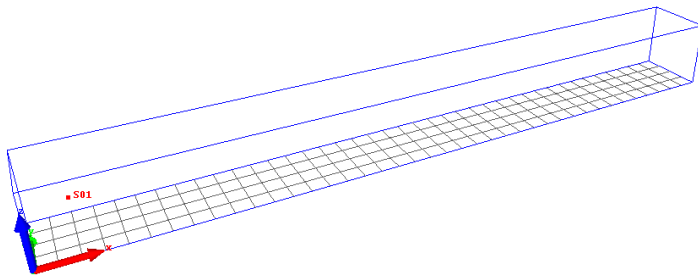
- Exemple $m = 5 \times 2 \times 5 = 50$ observations

$$D = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \frac{1}{s} + \beta_3 \alpha + U$$

$$x = [1:1:5]$$

$$s = [0.2:0.2:0.4] \quad \frac{1}{s} = [5, 2.5]$$

$$\alpha = [0.2:0.2:1]$$



$$\begin{pmatrix} D \\ D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & x & 1/s & \alpha \\ 1 & 1 & 5 & 0.2 \\ 1 & 1 & 5 & 0.4 \\ 1 & 1 & 5 & 0.6 \\ 1 & 1 & 5 & 0.8 \\ 1 & 1 & 5 & 1.0 \\ 1 & 1 & 2.5 & 0.2 \\ 1 & 1 & 2.5 & 0.4 \\ 1 & 1 & 2.5 & 0.6 \\ 1 & 1 & 2.5 & 0.8 \\ 1 & 1 & 2.5 & 1.0 \\ 1 & 2 & 5 & 0.2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 5 & 2.5 & 0.2 \\ 1 & 5 & 2.5 & 0.4 \\ 1 & 5 & 2.5 & 0.6 \\ 1 & 5 & 2.5 & 0.8 \\ 1 & 5 & 2.5 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{50} \end{pmatrix}$$

Analyse statistique multivariée

- Recherche des coefficients inconnus β_i par la méthode des moindres carré

$$\min \sum_{i=1}^m \left(D_i - \beta_0 - \beta_1 x - \beta_2 \frac{1}{s} - \beta_3 \alpha - U \right)^2$$

Coefficients estimés

$$\rightarrow (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$$

- Vecteur des coefficients (inconnus) estimés $[\hat{D}]$

$$[\hat{D}] = [X] [\hat{\beta}]$$

- Vecteur des résidus

$$[\hat{U}] = [D] - [\hat{D}]$$

Analyse statistique multivariée

- Critères d'ajustement du modèle

- Coefficient de détermination

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{D}_i - \bar{D})^2}{\sum_{i=1}^m (D_i - \bar{D})^2}$$

- Coefficient de détermination ajusté

$$R_{adj}^2 = \frac{(m-1)R^2 - k}{m - (k+1)}$$

- Variance du modèle

$$\sigma^2 = \frac{1}{m - (k+1)} \sum_{i=1}^m (D_i - \hat{D}_i)^2$$

- Pour obtenir un compromis satisfaisant entre un modèle trop simple (grands résidus) et un modèle faisant intervenir beaucoup de variables (donc très instable), il est nécessaire d'avoir **un coefficient de détermination ajusté maximum et une variance minimale.**

Analyse statistique multivariée

- Influence de l'observation i sur la valeur des coefficients estimés $\hat{\beta}_i$

- Effet de levier : $[\hat{D}] = [\hat{H}] [D]$
avec $[\hat{H}] = [X] ([X]^T [X])^{-1} [X]^T$

Observation i influente si $\hat{H}_{ii} > 2(k + 1)/m$

- Distance de Cook d'une observation i $d_i = \frac{\sum_{j=1}^m (\hat{D}_{j(i)} - \hat{D}_j)^2}{2\sigma^2}$

Observation i influente si $d_i > 1$

Analyse statistique multivariée

- Etude des coefficients estimés $\hat{\beta}_i$
 - Réalisation de tests : on teste si une hypothèse (H_0) est vraie, l'alternative étant une hypothèse (H_1)
 - Deux erreurs possibles :
 - Accepter l'hypothèse (H_0) alors qu'elle est fausse* (espèce 2)
 - Refuser l'hypothèse (H_0) alors qu'elle est vraie* (espèce 1)
 - Contrôle de l'erreur d'espèce 1 en fixant un seuil de significativité à 0,05 (5%)
 - Calcul de la valeur p pour : plus petit seuil de significativité pour lequel (H_0) est acceptée

- si $p \leq 0.05$ on va rejeter l'hypothèse (H_0) en faveur de (H_1)
- si $p > 0.05$ on va rejeter l'hypothèse (H_1) en faveur de (H_0)

Analyse statistique multivariée

- Etude des coefficients estimés $\hat{\beta}_i$
 - Le test de Fisher global avec un seuil de significativité 5%
 $(H_0) \hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_3 = 0$ (H_1) au moins un des coefficients est non nul, permet de tester la pertinence du modèle.
 - Le test de Student avec un seuil de significativité 5%
 $(H_0) \hat{\beta}_i = 0$ $(H_1) \hat{\beta}_i \neq 0$, permet de tester l'utilité du coefficient $\hat{\beta}_i$ dans le modèle de régression.
 - Le test de Fisher local avec un seuil de significativité 5%
 $(H_0) \hat{\beta}_i$ multiple de $\hat{\beta}_j$ (H_1) les deux coefficients ne sont pas multiples entre eux.

Analyse statistique multivariée

- Etude des résidus $\hat{U}_i$
 - Résidus studentisés $\hat{U}_{STUD\ i} = F(\hat{U}_i, \hat{H}H_{ii}, \sigma_i^2)$
 σ_i^2 variance des résidus
- Les résidus studentisés doivent obéir à une loi normale centrée en 0 et de variance σ^2 du modèle (diagramme QQ)
 $N(0, \sigma^2)$
- Indépendance des résidus $[\hat{U}_{STUD}]$ par rapport à la variable à expliquer $[D]$ et par rapport aux variables à expliquer $[X]$: le graphe des résidus en fonction de ces variables doit être sans forme particulière
- Homoscédasticité des résidus : les variances σ_i^2 des résidus doivent être du même ordre de grandeur

III Estimation de la loi *via* l'analyse statistique

Estimation de la loi

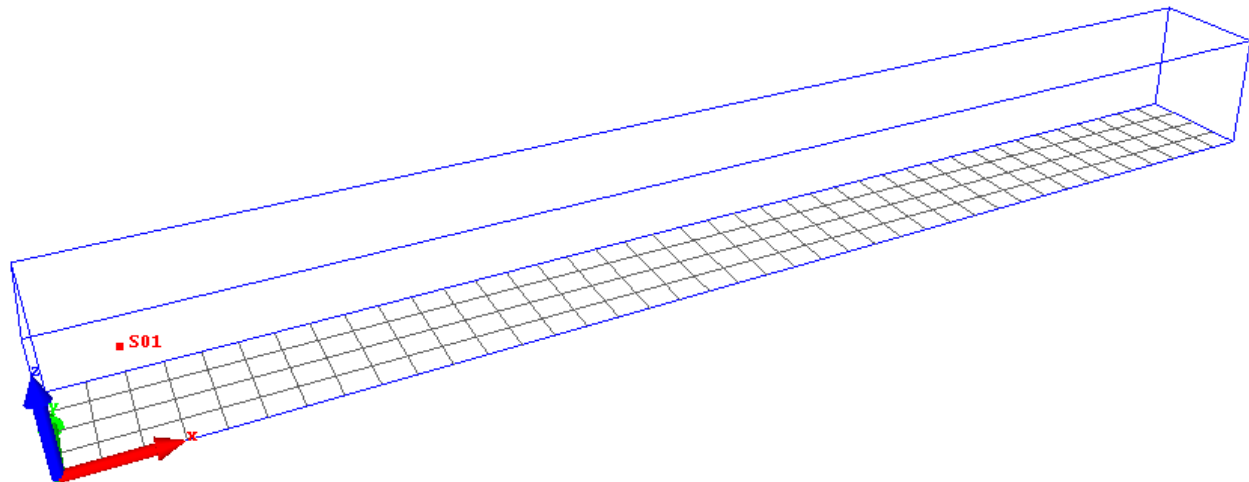
- Cas du couloir [40 : 4 : 4]

$$x = [1.5 : 0.25 : 29]$$

$$\alpha = [0.1 : 0.1 : 0.9]$$

$$s = [0 : 0.1 : 1.0]$$

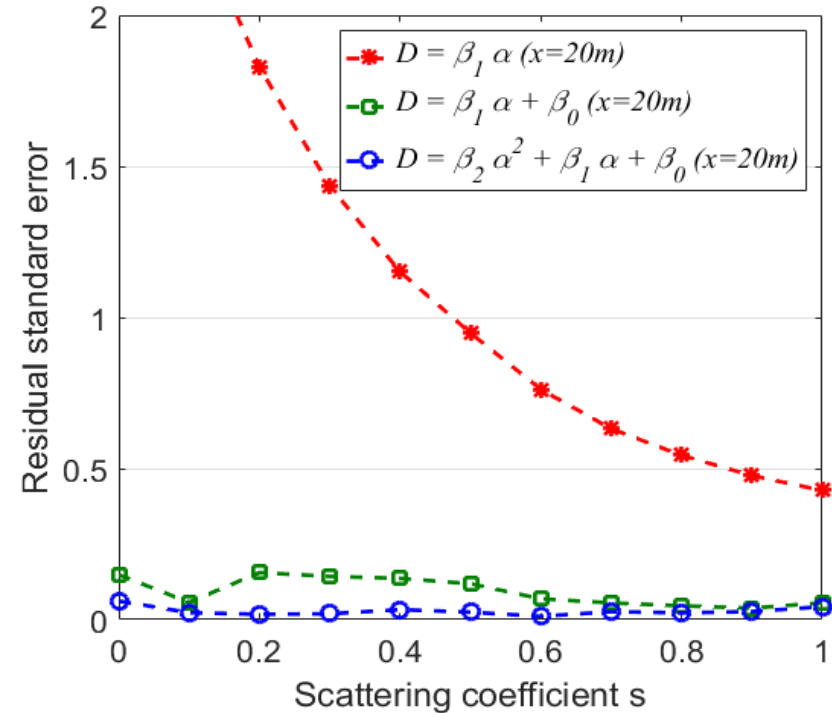
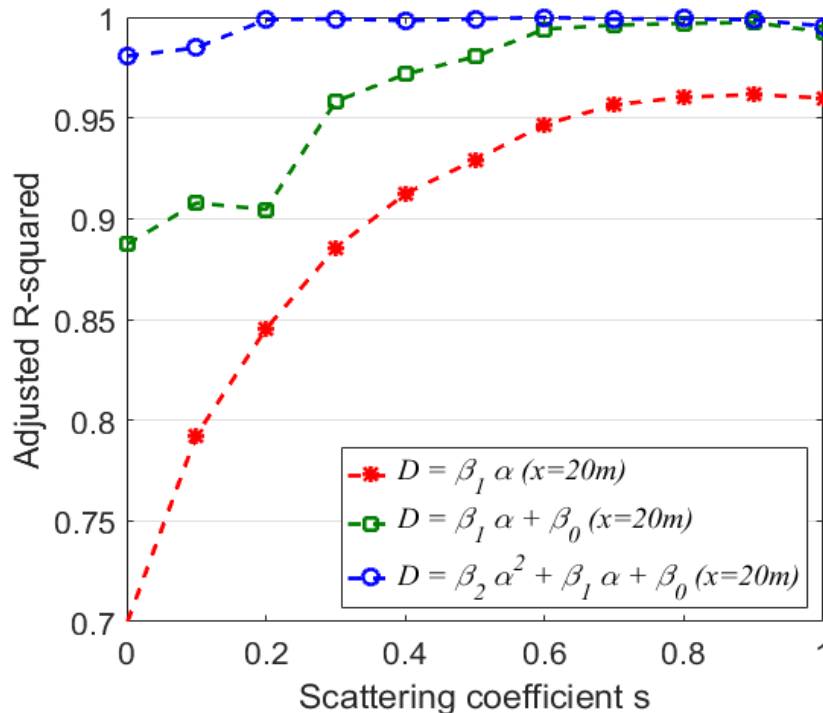
$$m = 107 \times 9 \times 11 = 10\,593 \text{ observations}$$



Estimation de la loi

- Ajustement du modèle : influence de l'absorption α

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^p \beta_i \alpha^i + (\beta_0)$$

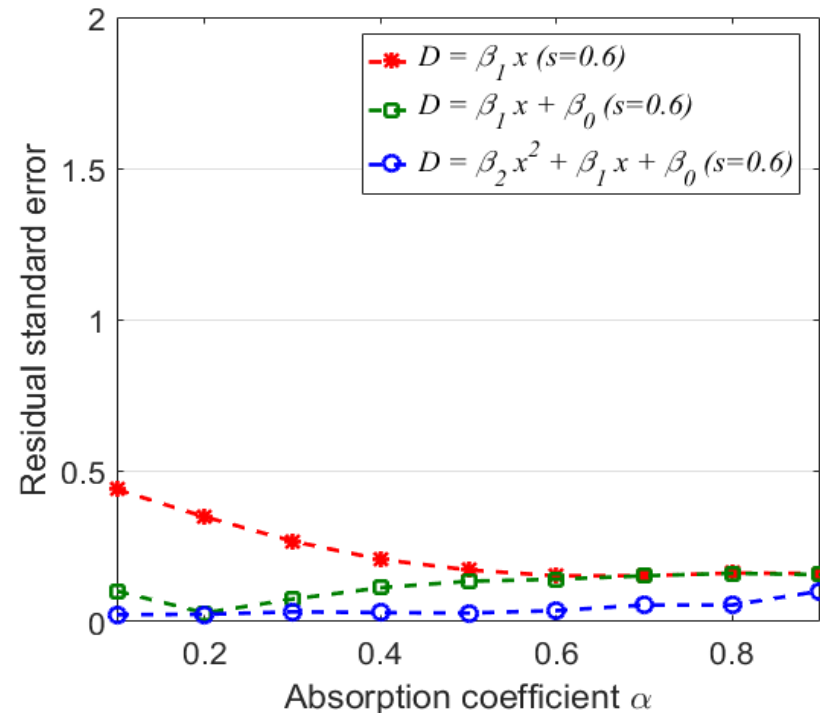
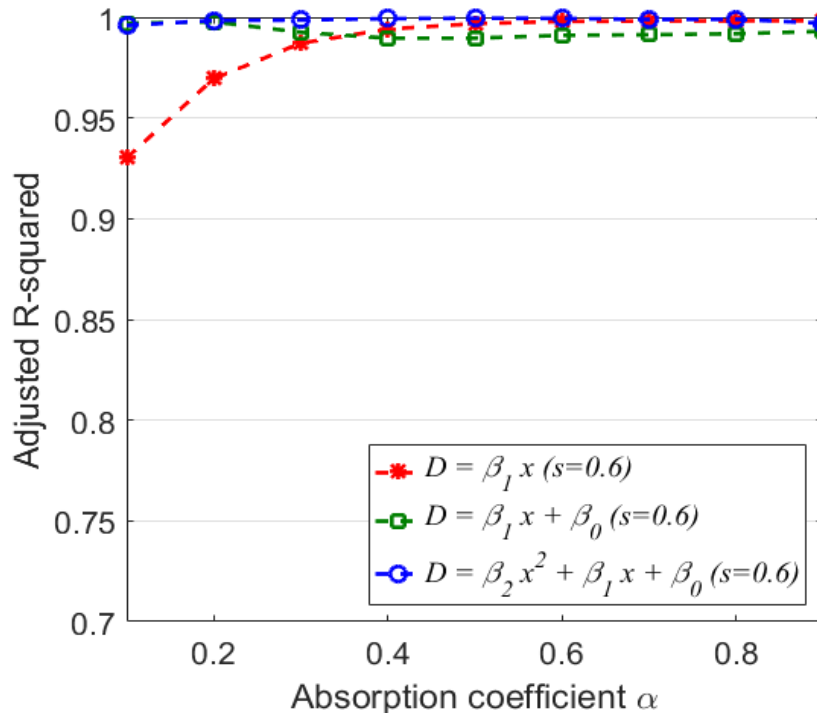


- Influence des faibles valeurs de la diffusivité sur l'ajustement
- Ordonnée à l'origine
- Ordre $p = 2$ avec $\beta_0 \neq 0$

Estimation de la loi

- Ajustement du modèle : influence de la distance x

$$D(x) = \sum_{i=0}^p \beta_i x^i + (\beta_0)$$



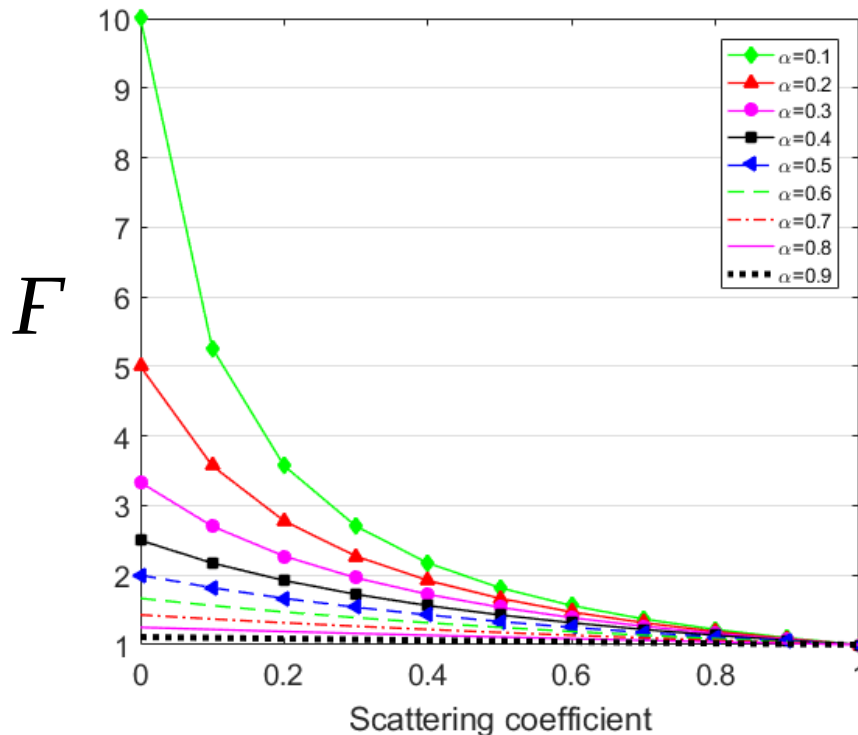
- Influence des faibles valeurs d'absorption sur l'ajustement
- Ordonnée à l'origine
- Ordre $p = 1$ ou $p = 2$ avec $\beta_0 \neq 0$

Estimation de la loi

• Ajustement du modèle : influence de la diffusivité s

- Ordre p trop élevé et faible ajustement
- Prise en compte par la fonction F (JASA 2016)

$$D(s) = \sum_{i=1}^p \beta_i s^i + (\beta_0)$$

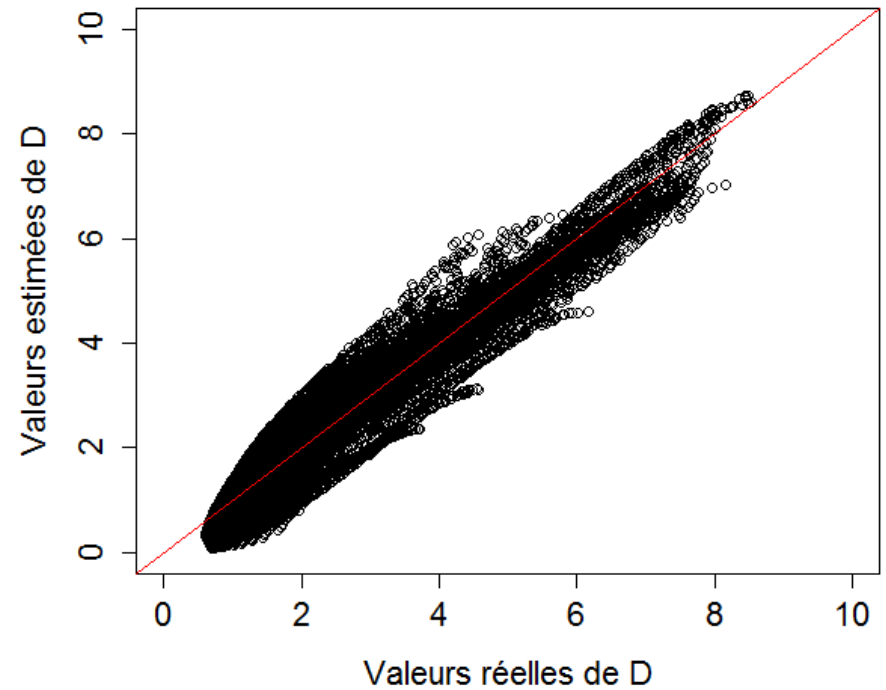
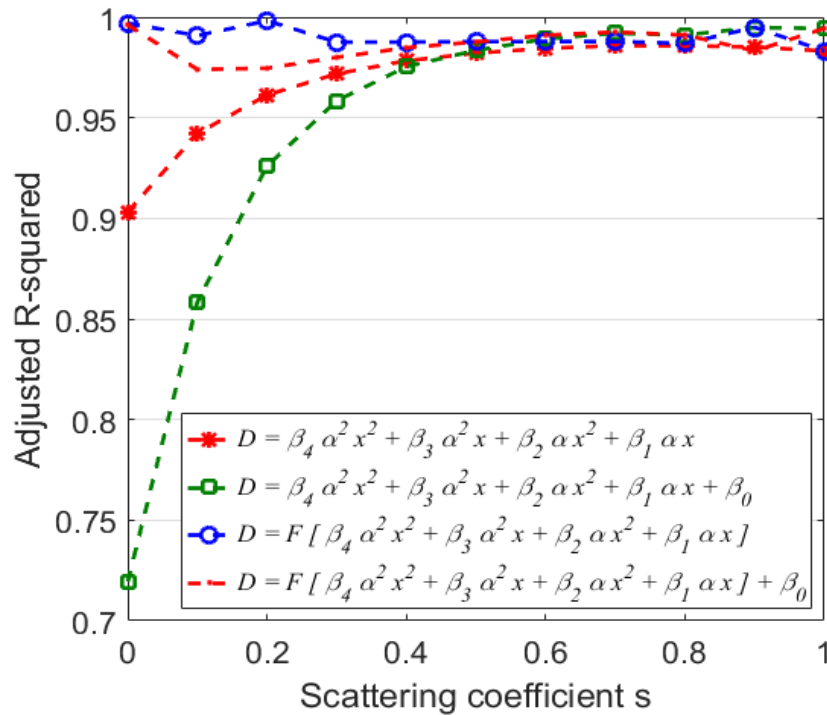


$$D \rightarrow D(s) \times F$$

$$F = \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha) s}$$

Estimation de la loi

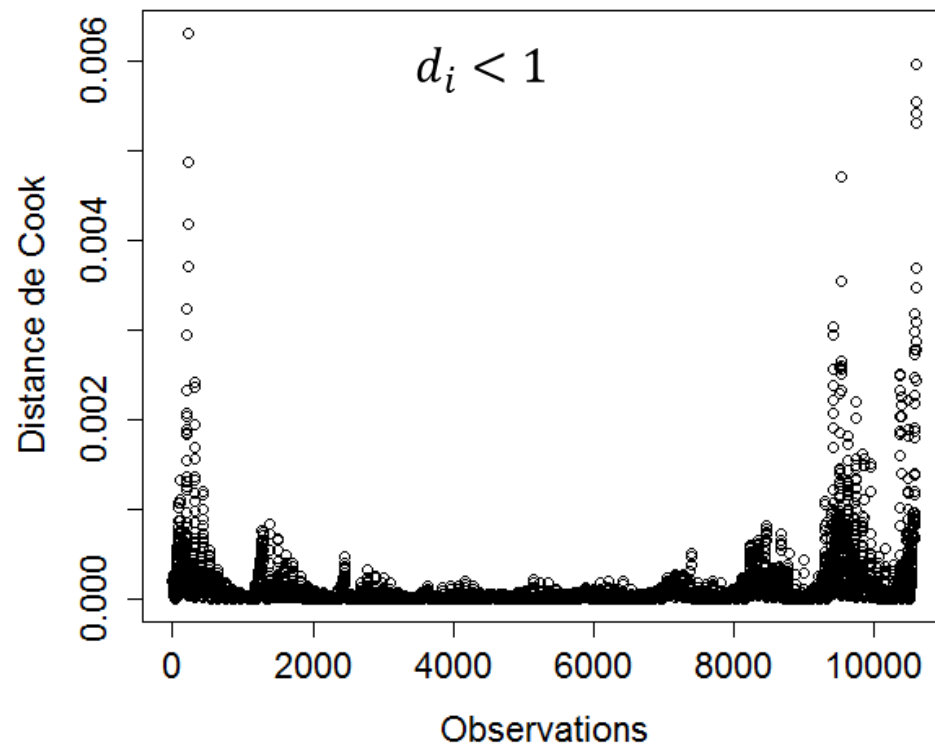
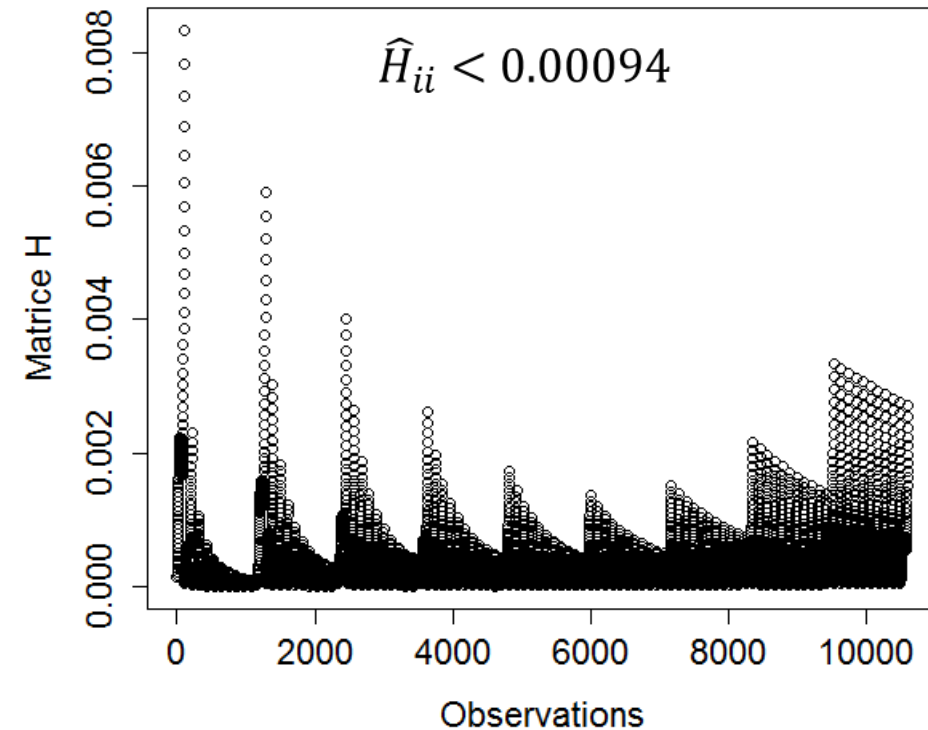
- Ajustement du modèle : influence de l'absorption α , de la distance x , de la diffusivité s



$$D = \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha)s} [0,0117 \alpha^2 x^2 - 0,4027 \alpha^2 x - 0,0093 \alpha x^2 + 0,5793 \alpha x]$$

Estimation de la loi

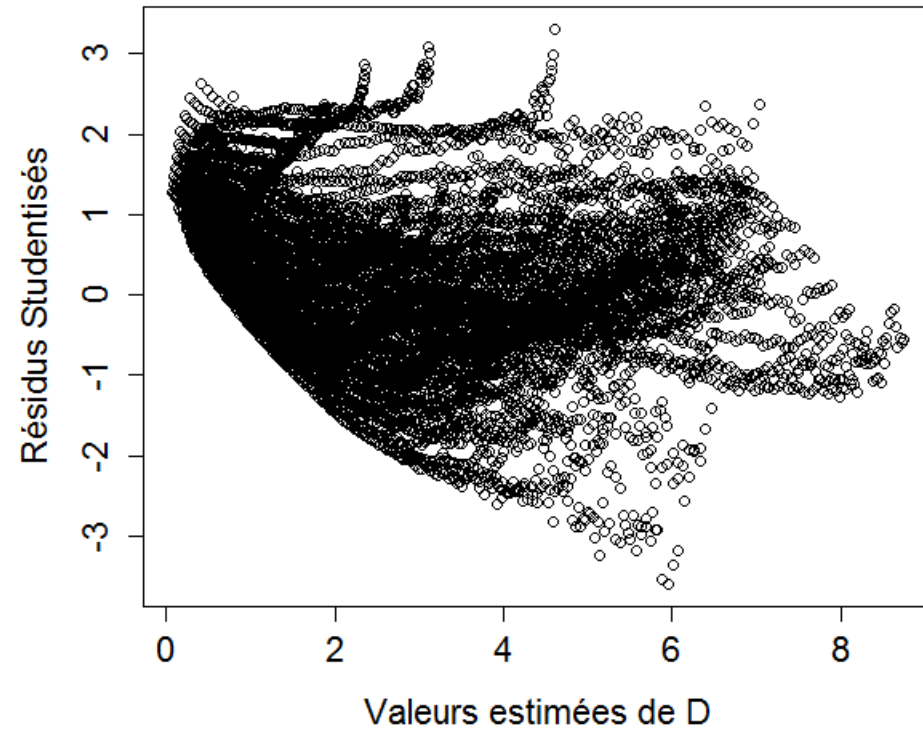
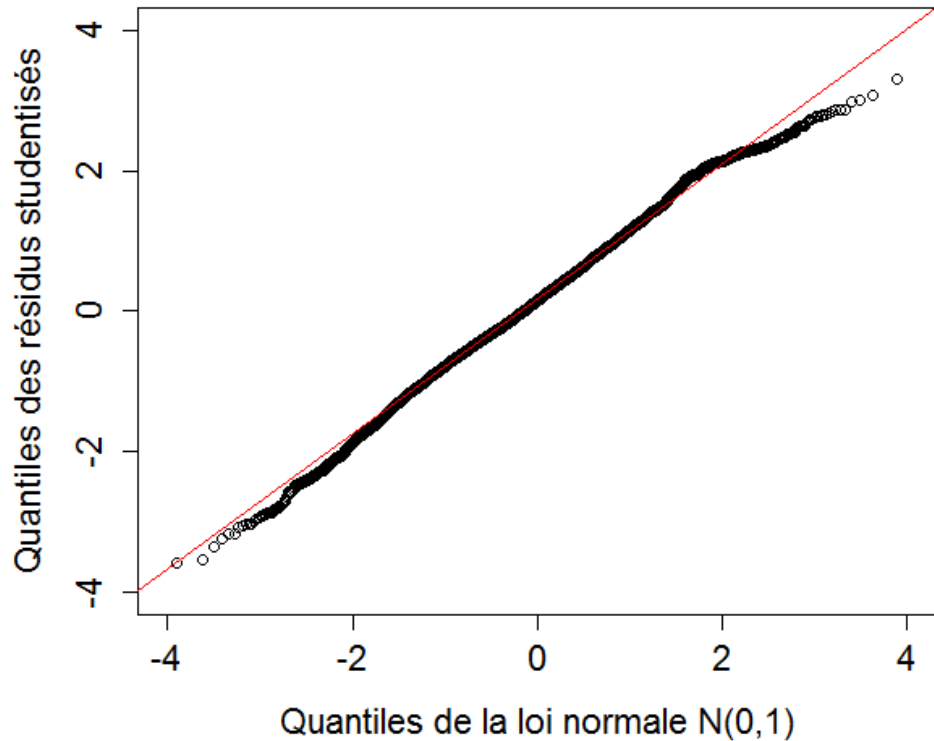
- Test sur les observations : aucune observation i influente



- Test sur les coefficients $\hat{\beta}_i$ validés : hypothèses (H0) rejetées

Estimation de la loi

- Vérification sur les résidus : loi normale, aucune forme particulière, variance des résidus du même ordre de grandeur



IV Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

- Obtention d'une loi pour $D(x, \alpha, s)$ en x^2 , α^2 et $\frac{1}{s}$
- Intégration de cette loi au sein du modèle de diffusion
- Précision du modèle : ne pas exclure des lois plus simples
- Application de la méthode à d'autres couloirs
- Interprétation scientifique des coefficients

Merci de votre attention

Cédric Foy
CEREMA - Laboratoire de Strasbourg
11 rue Jean Mentelin
03 88 77 79 26
Cedric.foy@cerema.fr