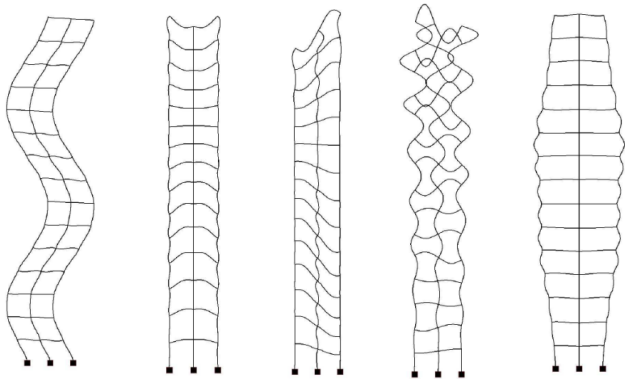
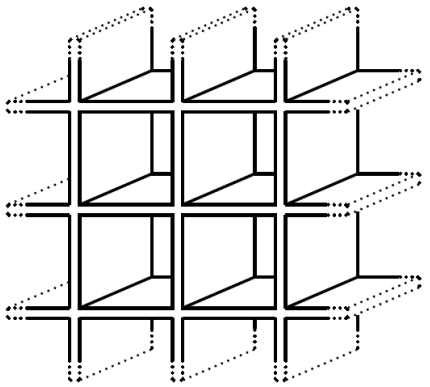
Modèles homogénéisés en vibrations de structure





Claude Boutin / Stéphane Hans / Céline Chesnais / Antoine Rallu

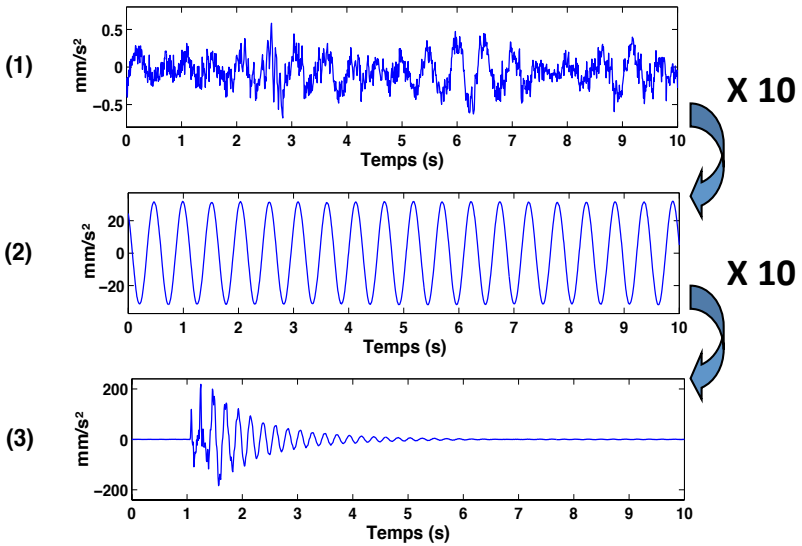
UNIVERSITÉ DE LYON

cnrs

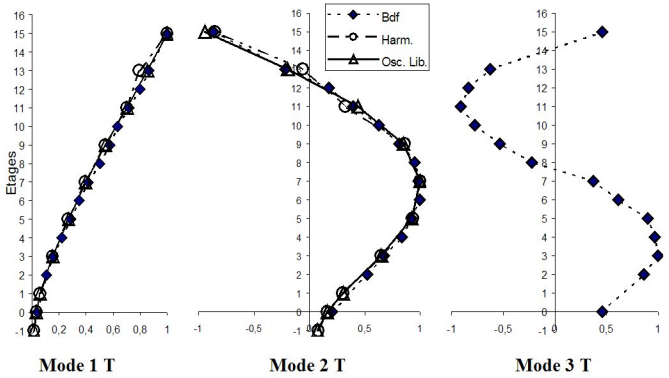
ENTPE

Les origines

Claude Boutin + Question de la Vulnérabilité sismique du bâti existant ?



Modes : Fréquences, Amortissements, Déformées.



Mesures réalisées sous : (1) bruit mécanique ambiant
(2) sollicitation forcée
(3) choc

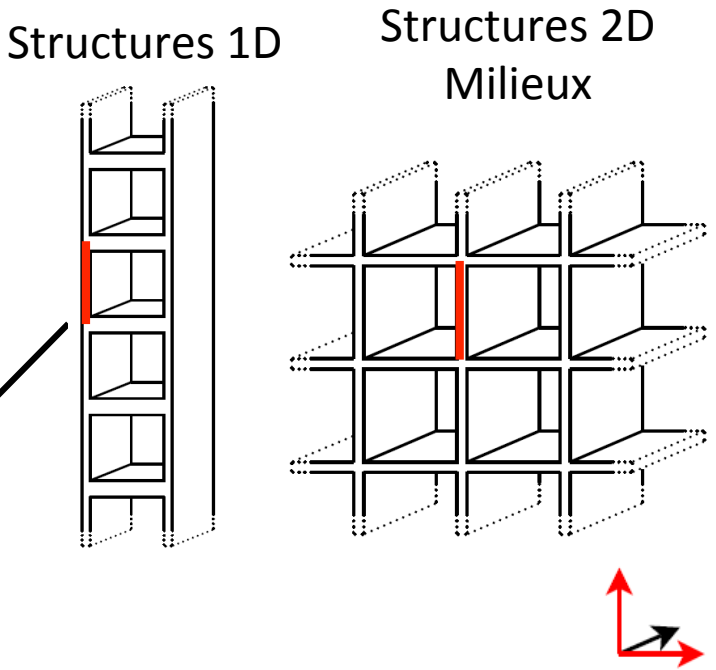
Difficulté : Informations <-> Modèle correspondant ??

Comportement en apparence continue → Homogénéisation

Homogénéisation des milieux périodiques discrets

[Caillerie, 99]

Structure périodique
Cellule non contreventée
Déformabilité en cisaillement = ou >> extension



<u>Hypothèses</u>

➔ Elément de base : Poutre de Bernoulli
➔ Connections rigides / sans masse
➔ Petites déformations / Domaine Elastique / Régime harmonique

<u>Apports/Modifications 1997 → 2016</u>

➔ Contraste de propriétés entre éléments
➔ Régime de fonctionnement local (Quasi-statique → résonance locale)
➔ Approche mono-cellule / multi-cellule (Modulation)

Structure de l'exposé

1. Procédure d'homogénéisation

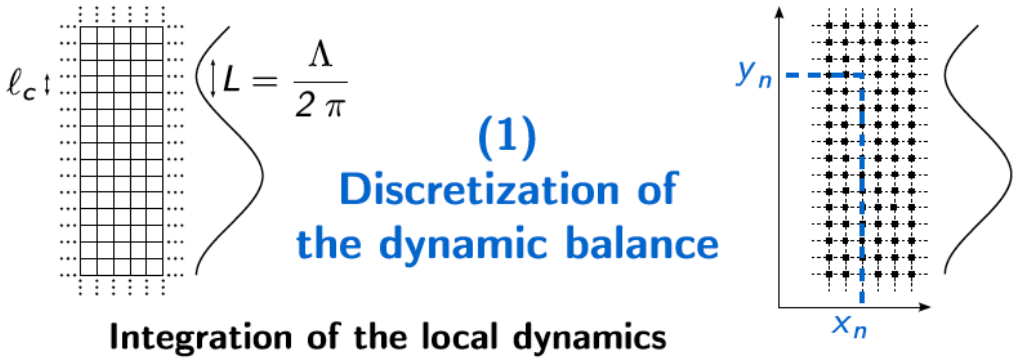
2. Modèles généralisés de poutre (1D)

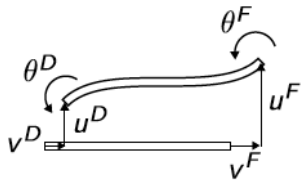
2. Milieux généralisés 2D

3. Approche en modulation : une généralisation de l'homogénéisation pour les situations moyennes et hautes fréquences

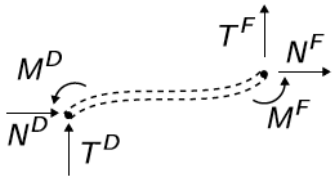
Procédure d'homogénéisation

!!! Procédure entièrement analytique !!!!

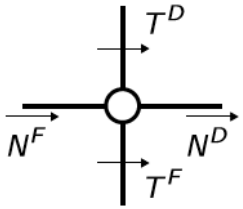




Euler-Bernoulli beam



Effort $= f(u, v, \theta, \omega)$



Geometry

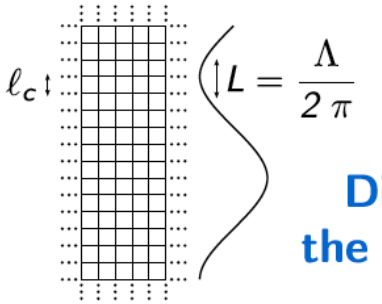
$\Downarrow$

Nodal balance equations

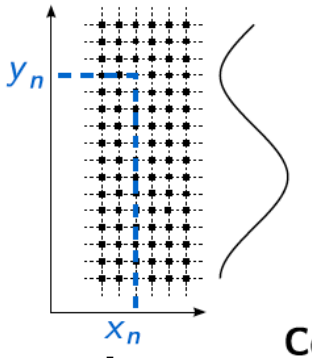
$E(x_n, y_n, \omega) = 0$

Procédure d'homogénéisation

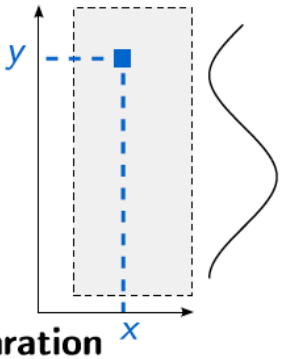
!!! Procédure entièrement analytique !!!!



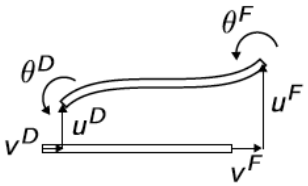
(1) Discretization of the dynamic balance



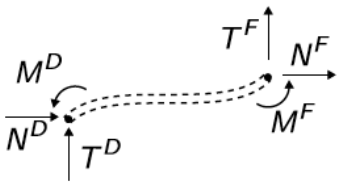
(2) Homogenization process



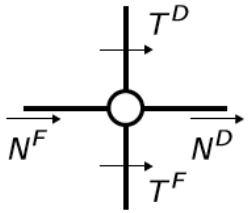
Integration of the local dynamics



Euler-Bernoulli beam



Effort $= f(u, v, \theta, \omega)$



Geometry

$\Downarrow$

Nodal balance equations

$E(x_n, y_n, \omega) = 0$

Condition of scale separation

$$\epsilon = \frac{\ell_c}{L} << 1$$

Hyp : variation lente d'un nœud à l'autre

$\Downarrow$

Expansion of the variables

$$U_n = U^0(x_n, y_n) + \epsilon\, U^1(x_n, y_n) + \epsilon^2 U^2(x_n, y_n) + \dots$$

Expansion of the efforts *

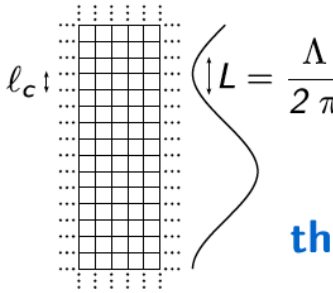
Normalization

= estimation of the physical parameters according to ϵ

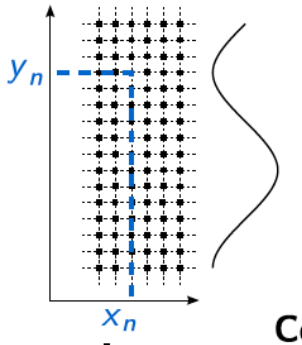
*** En fonction du régime local**

Procédure d'homogénéisation

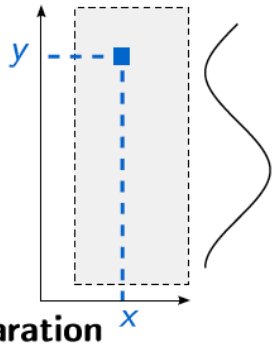
Homogenisation of discrete periodic media (D. Caillerie, 3SR Grenoble)



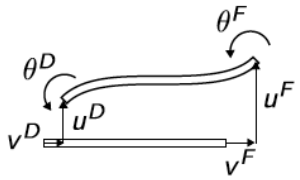
(1) Discretization of the dynamic balance



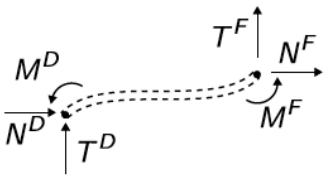
(2) Homogenization process



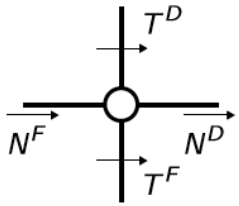
Integration of the local dynamics



Euler-Bernoulli beam



Effort $= f(u, v, \theta, \omega)$



Geometry

⇓

Nodal balance equations

$$E(x_n, y_n, \omega) = 0$$

Condition of scale separation

$$\epsilon = \frac{\ell_c}{L} << 1$$

⇓

Expansion of the variables

$$U_n = U^0(x_n, y_n) + \epsilon\, U^1(x_n, y_n) + \epsilon^2 U^2(x_n, y_n) + \dots$$

Expansion of the efforts

Normalization

= estimation of the physical parameters according to ϵ

Expansion of the nodal balance

$$E = E^0(x,y) + \epsilon\, E^1(x,y) + \epsilon^2 E^2(x,y) + \dots$$

$$\begin{cases} E^0(x,y) = 0 \\ E^1(x,y) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Separation of the orders of ϵ

Procédure d'homogénéisation

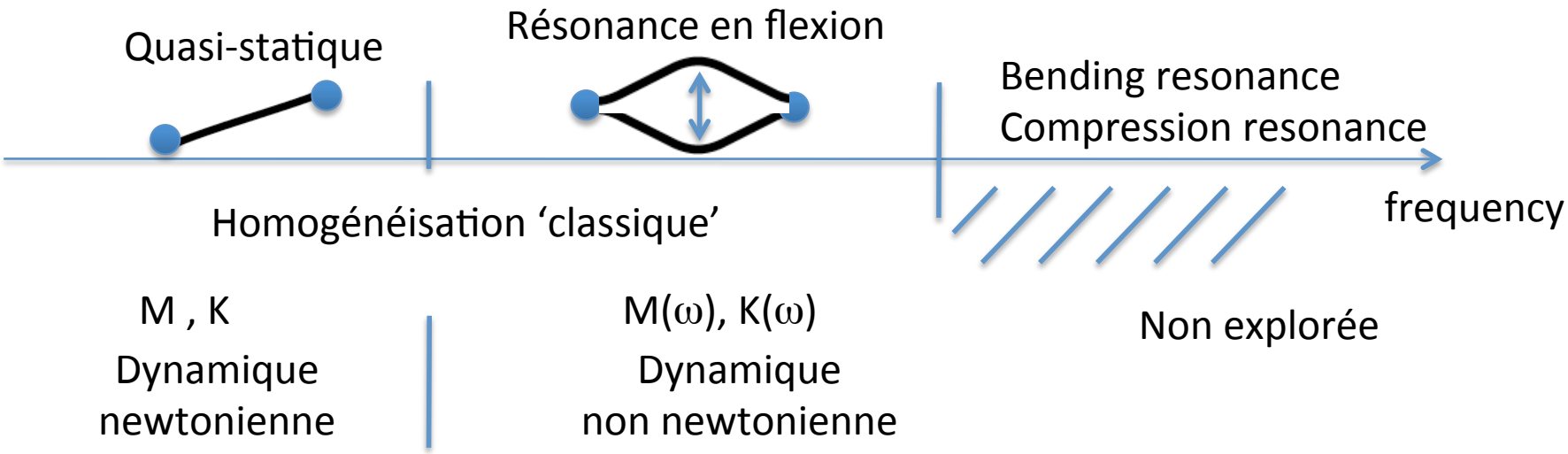
Avantages:

(1) Comportement macro. décrit par des équations analytiques

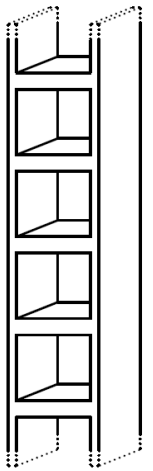
(2) Pas de perte d'informations au niveau micro

Les paramètres sont fonctions :

- des propriétés mécaniques et géométriques des éléments de base
- du régime de fonctionnement des éléments (Q-Statique ou Dynamique)

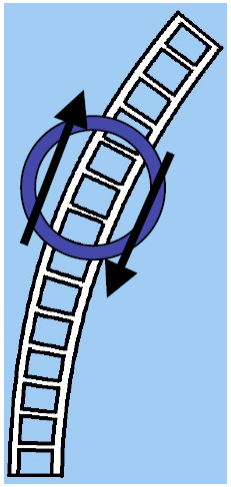


Modèles généralisés de poutre (1D)



Le comportement macro *transversal* dépend de **3** mécanismes clés

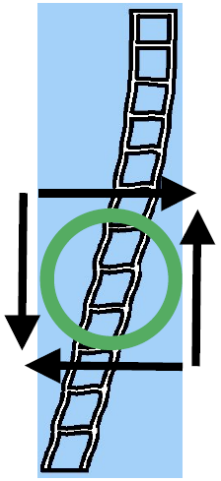
Flexion globale



EI

Classique

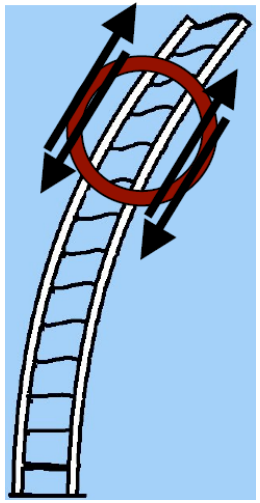
Cisaillement (flexion locale)



K

moins Classique

Flexion couplée



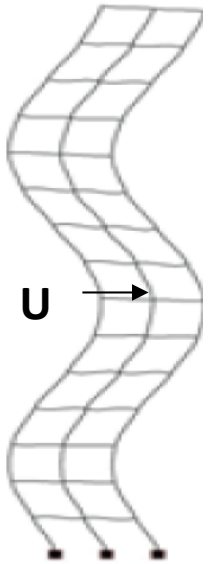
EI_μ

Atypique

Paramètres (K, EI, EI_μ) : Calcul élasto-statique sur une cellule

Famille de Poutres généralisées

Translation U + Quasi-statique locale



Poutre Générique

$$\frac{EI_\mu EI}{K}U^{(6)} - (EI_\mu + EI)\,U^{(4)} - \frac{EI\Lambda\omega^2}{K}U'' + \Lambda\omega^2 U = 0$$

Flexion Globale + Cisaillement + Flexion Interne

Timoshenko Elancée

$$EI\,(U^{(4)} + \frac{\Lambda\omega^2}{K}U'') - \Lambda\omega^2 U = 0$$

Flexion Globale + Cisaillement

Flexion Interne et Cisaillement

$$EI_\mu U^{(4)} - KU'' - \Lambda\omega^2 U = 0$$

Cisaillement + Flexion Interne

Flexion Globale

$$EI\,U^{(4)} - \Lambda\omega^2 U = 0$$

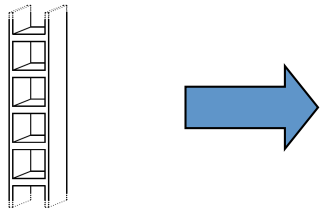
Cisaillement

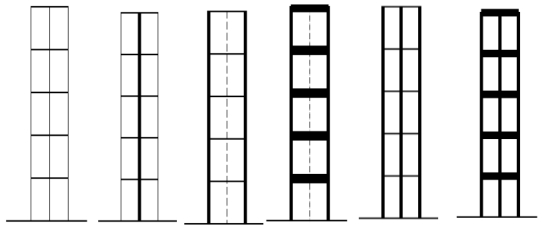
$$KU'' + \Lambda\omega^2 U = 0$$

Flexion Interne

$$EI_\mu U^{(4)} - \Lambda\omega^2 U = 0$$

Résultats Généraux



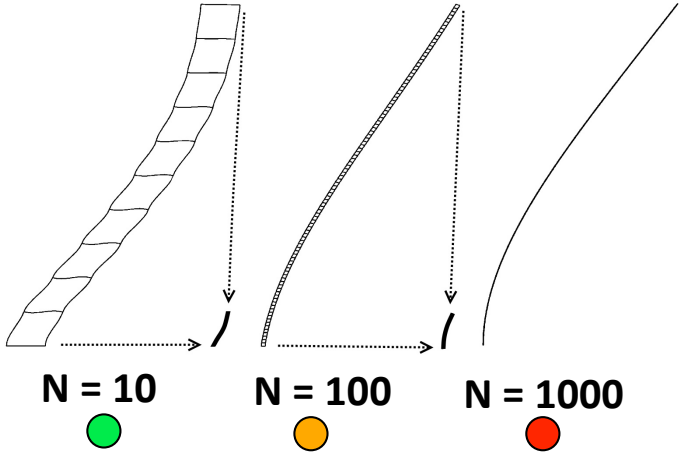


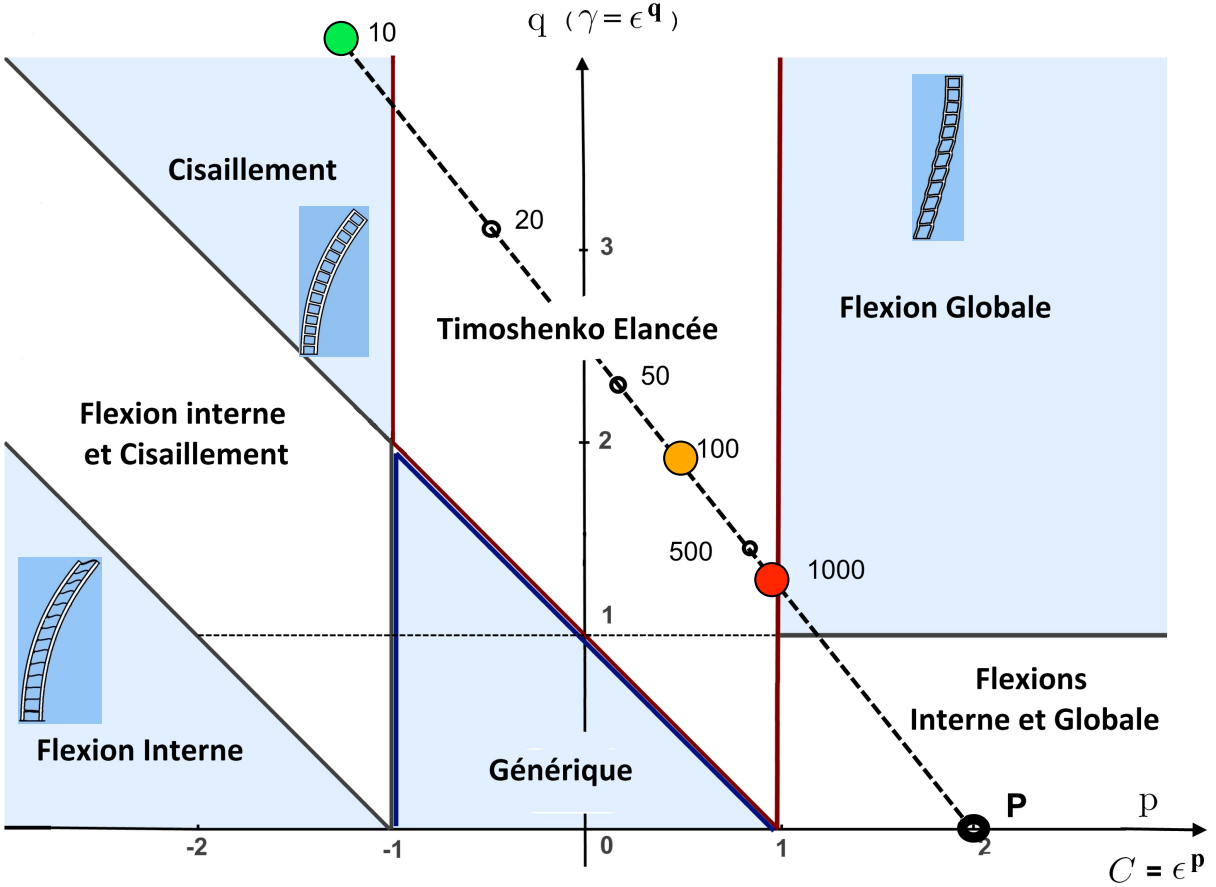
Cadre d'analyse du fonctionnement d'un bâtiment

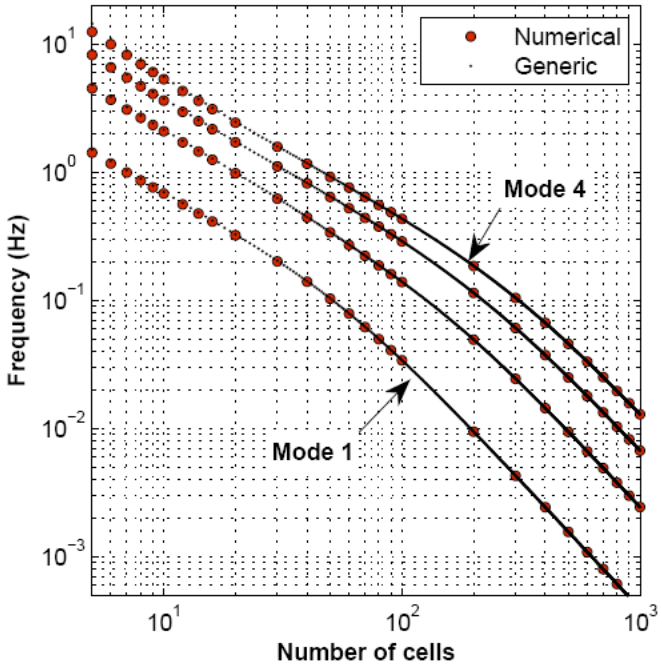
Validation numérique

Cellule fixe → C, γ constants

Nombre d'étage N variable → $\varepsilon = \pi/2N$







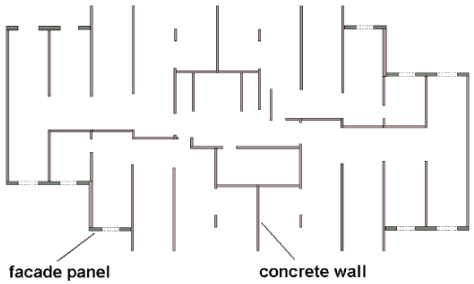
Exploitation en auscultation

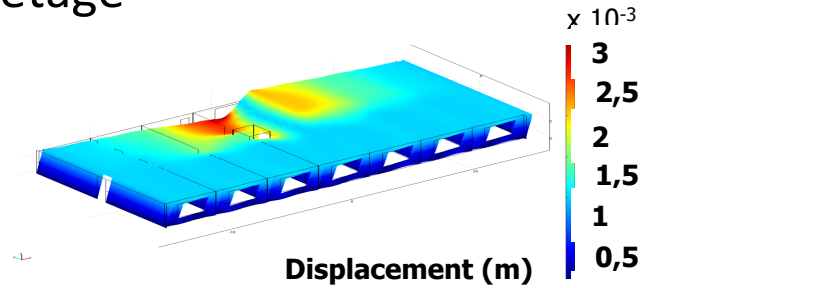
Détermination du modèle approprié

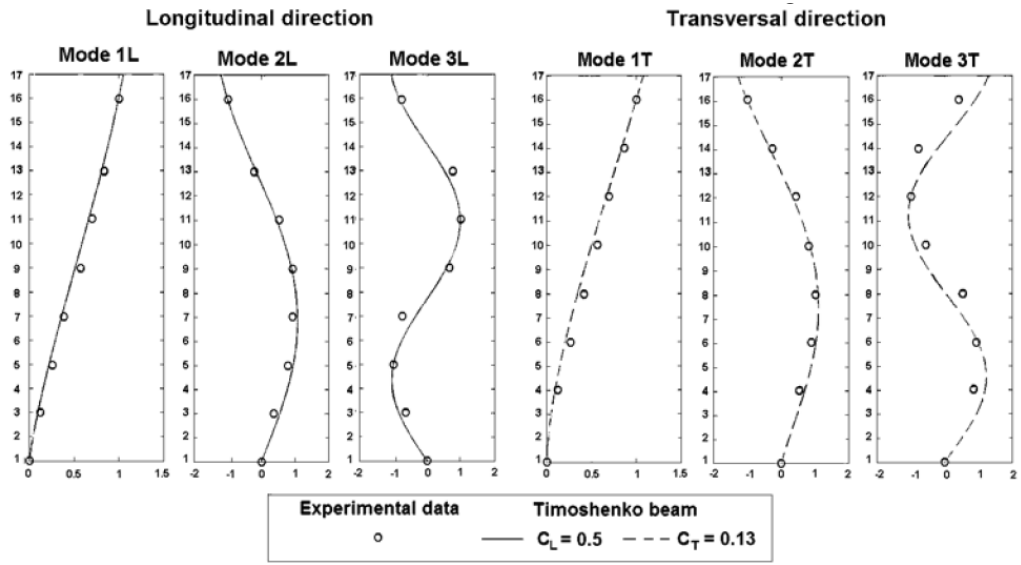
(1) Mesures : répartition des fréquences modales

(2) Plan → Calcul élastique sur un étage

→ Paramètres du modèle



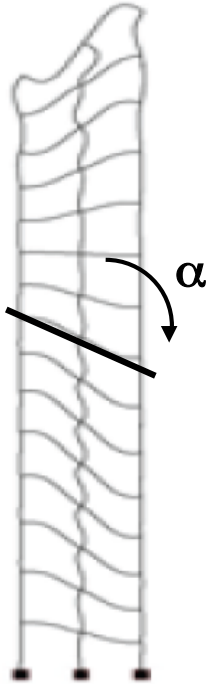




Timoshenko élancé --> deux directions

Dynamique 3D Globale Numérique → Statique d'étage + Dynamique 1D analytique de poutre

Exemple d'autre résultat : Mode atypique de giration

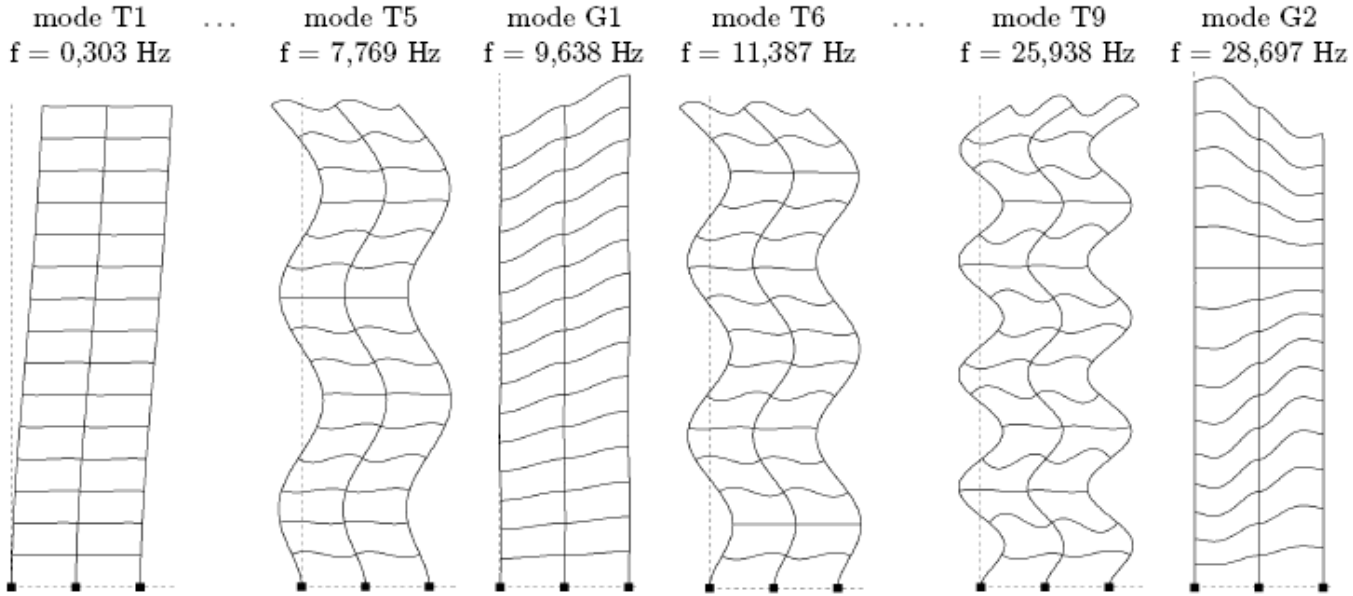


Rotation de section α + Quasi-statique locale

$$J\omega^2 \alpha - K \alpha = EI \alpha''$$

Impossible pour les poutres pleines

Possible en poutres creuses et confirmé numériquement



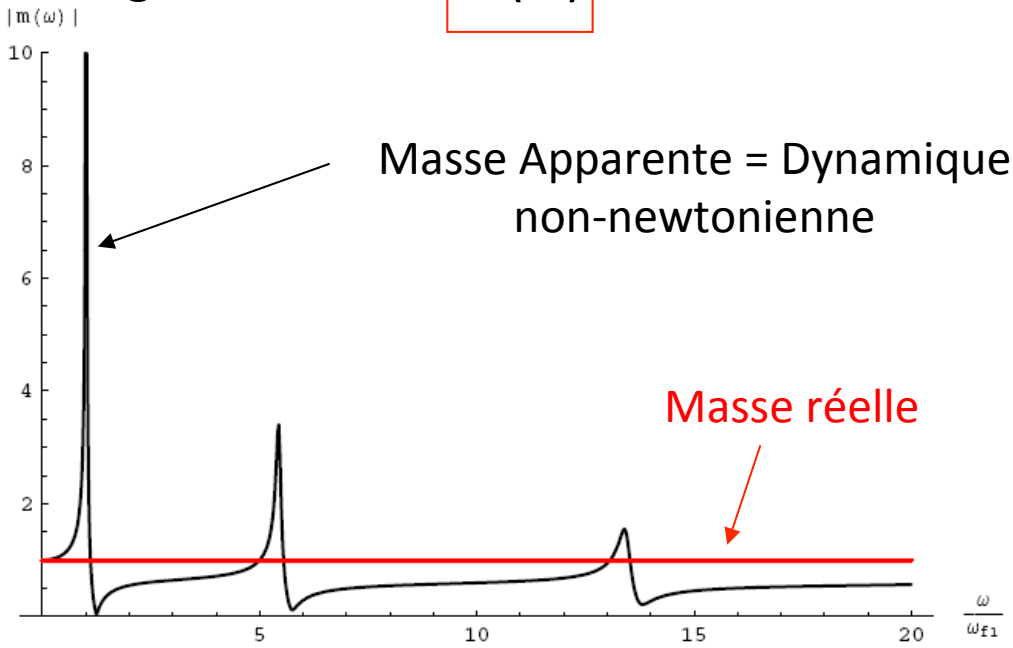
Modèles avec résonance locale

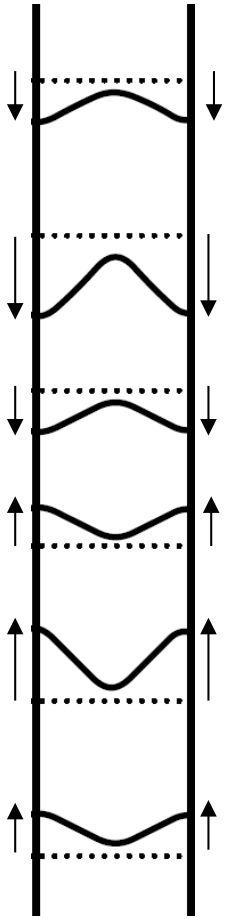
Quasi-statique locale ➔ Résonance locale (Flexion d'éléments)
// Dynamique globale (Extension-Compression d'ensemble)

Exemple :

Modes de giration : $J(\omega)\,\omega^2\,\alpha - K\,\alpha = EI\,\alpha''$

Modes longitudinaux : $\Lambda(\omega)\,\omega^2\,V = EA\,V''$

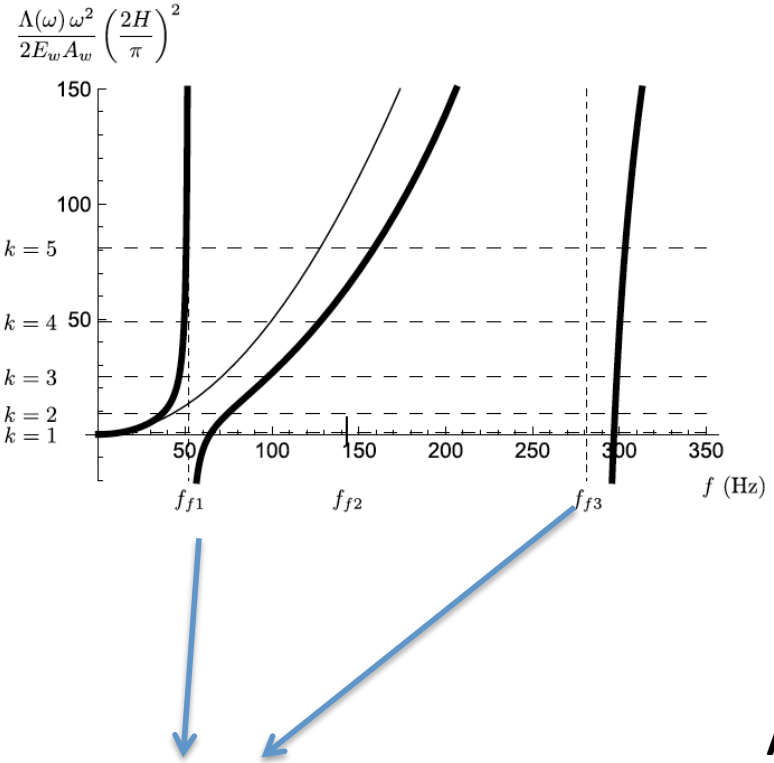




→ Bandes Passantes ou interdites (résonance des éléments)

Modèles avec résonance locale

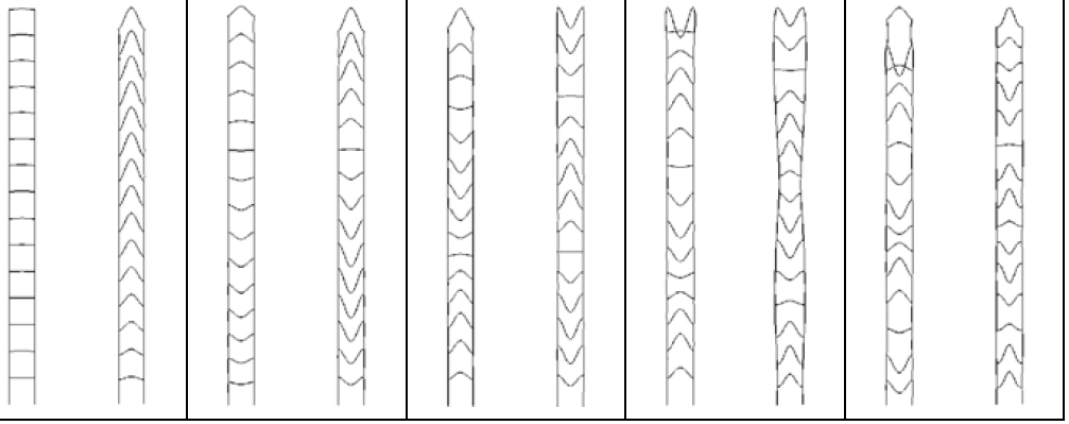
Poutre de compression : $\Lambda(\omega)\ \omega^2\ V = EA\ V''$



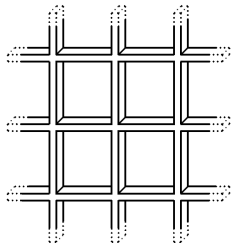
Modes de résonance impairs des ‘’planchers’’ = point d’accumulation de modes de structure

Modes verticaux

$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$	
13.76	64.83	35.99	74.22	45.46	97.37	48.28	127.0	49.76	157.5



Avec la résonance locale, première possibilité d’ ‘’homogénéiser’’ des modes hautes fréquences

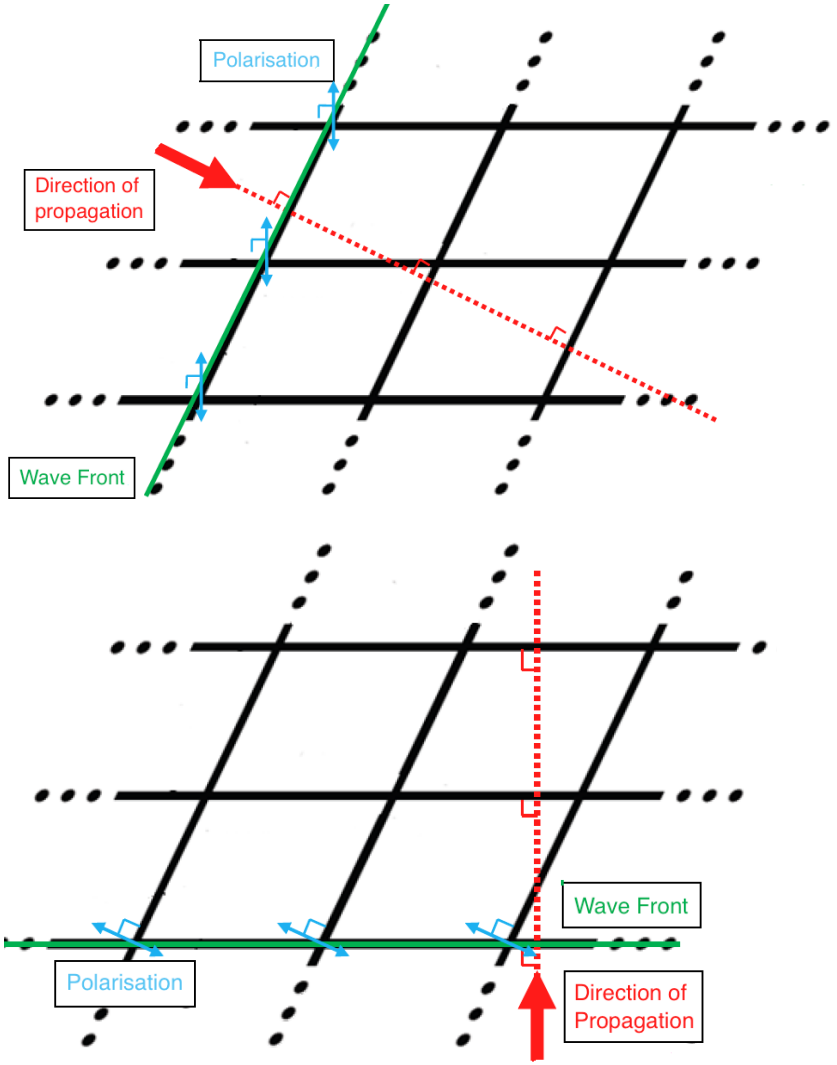


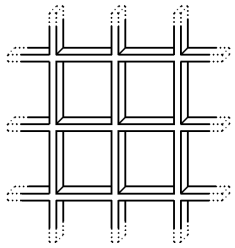
Extension aux Milieux 2D
Réseau incliné et propagation d'onde

Ondes de Cisaillement (BF)

Anisotropie extrême

- Deux directions de propagation
- Non dispersif
- Flexion locale des éléments



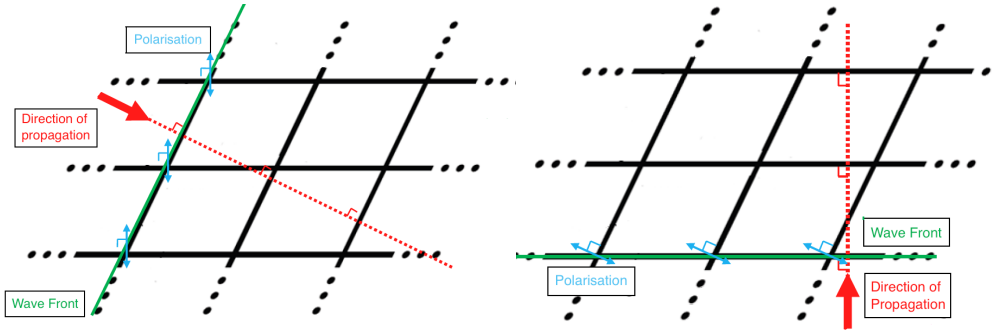


Milieux 2D : réseau incliné et propagation d'onde

Ondes de 'Cisaillement ':

Anisotropie extrême

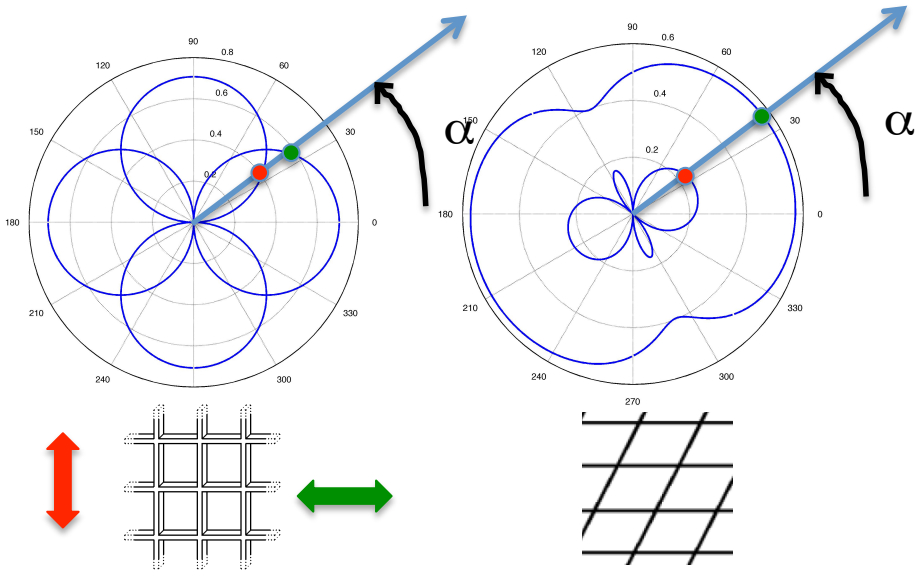
- Deux directions de propagation
- Non dispersif
- Flexion locale des éléments

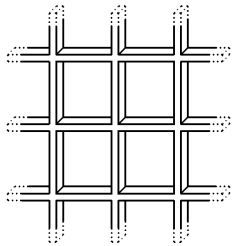


Ondes de 'Compression'

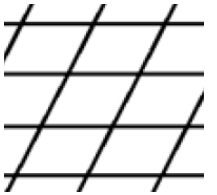
- Forte anisotropie
- Non dispersif (hors résonance locale
- Deux ondes possibles
  (polarisation / vitesse différentes)
- Compression des éléments

Celerity in polar representation





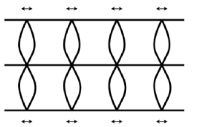
Description générale



Equation générale:

$$\mathbf{div}\left(\underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{div}\left(\underline{\underline{\underline{\mu}}}\right)\right) + \mathbf{M}(\omega)\,\omega^2\,\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{0}}$$

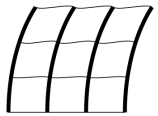
Flexion globale



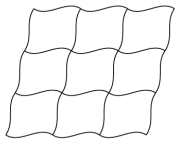
résonance locale

avec :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E_x}\,\epsilon_{xx} & \mathbf{G}\,\epsilon_{xy} \\ \mathbf{G}\,\epsilon_{xy} & \mathbf{E_y}\,\epsilon_{yy} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{G} << \{\mathbf{E_x}, \mathbf{E_y}\}$$



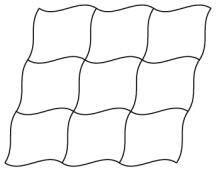
Extension-Compression locale



Flexion locale des éléments

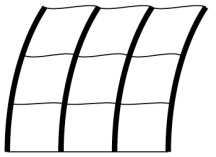
Dégénération:

$$\mathbf{div}\left(\underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{div}\left(\underline{\underline{\underline{\mu}}}\right)\right) + \mathbf{M}(\omega)\,\omega^2\,\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{0}}$$



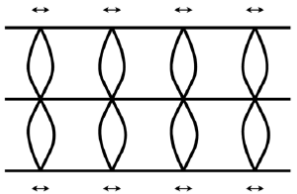
Cauchy

$$\mathbf{div}\left(\underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{div}\left(\underline{\underline{\underline{\mu}}}\right)\right) + \mathbf{M}(\omega)\,\omega^2\,\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{0}}$$



Second gradient

$$\mathbf{div}\left(\underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{div}\left(\underline{\underline{\underline{\mu}}}\right)\right) + \mathbf{M}(\omega)\,\omega^2\,\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{0}}$$



Résonance (méta-matériau)

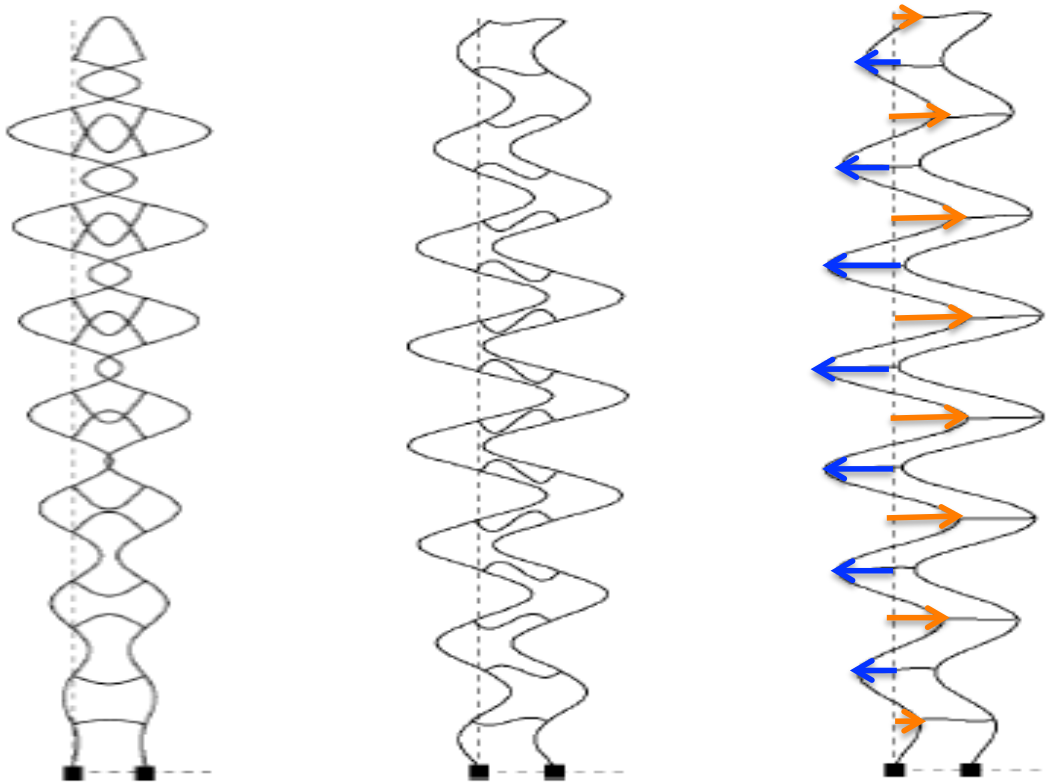
Le concept de modulation : une généralisation de l'homogénéisation aux cas 'hautes fréquences'

- Homogénéisation au sens classique, basée sur :
  - Une cellule de base
  - Variables homogénéisées: déplacements des nœuds

  Sous entendue : Variation faible d'un nœud à l'autre

- Observation (numérique) :

  Existence de modes homogénéisables à condition de considérer plusieurs cellules (ici deux)



Le concept de modulation : une généralisation de l'homogénéisation aux cas 'hautes fréquences'

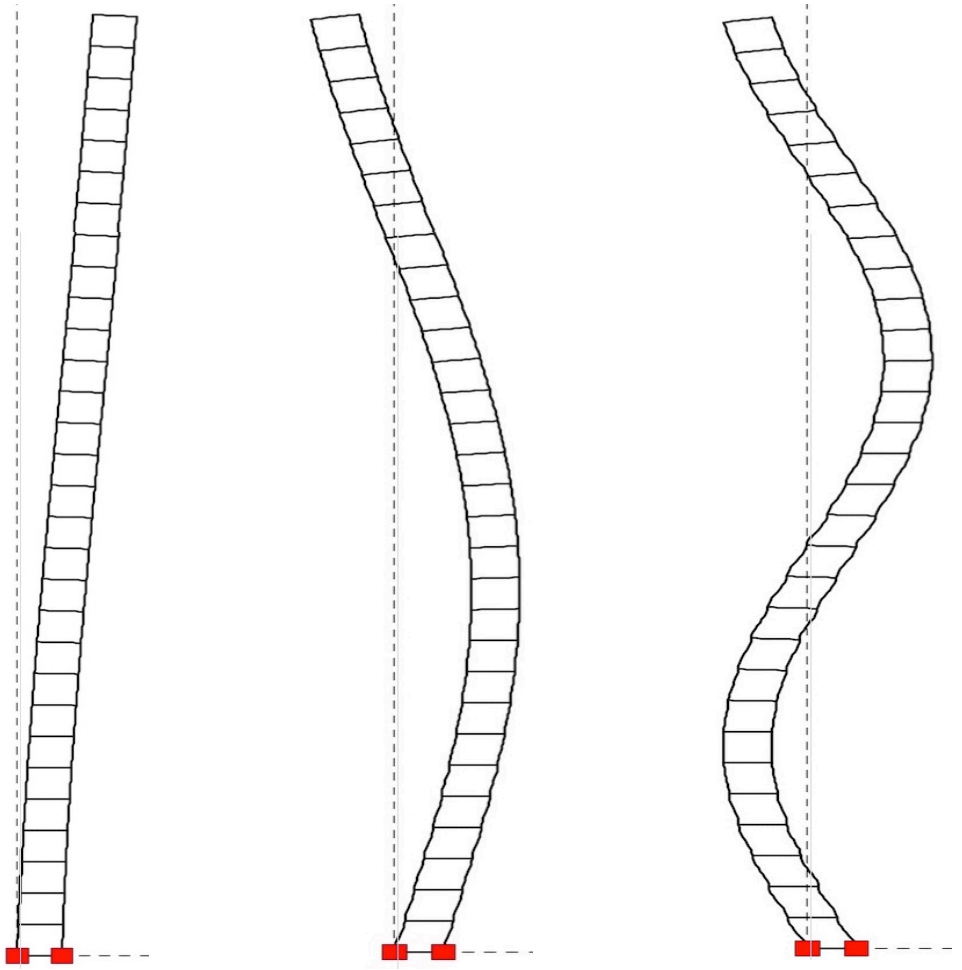
- Principe du calcul en modulation
  - Le **nombre de cellules** devient un paramètre de la description
  - Variables homogénéisées: Amplitude du mouvement des nœuds
    Sous entendue : Variation faible d'un nœud à l'autre
  - Notion de modes périodiques de la multi-cellule

- Structure multi-portique : épaisseur murs O(ε l) / plancher O($\varepsilon^{1/2}$ l)
  modèles en fonction du nombre de cellules

  - 1 C : Timoshenko $$E_w\, I\, U'''' + \frac{E_w\, I\, \Lambda_f\, \omega^2}{K_w}\, U'' - \Lambda_f\, \omega^2\, U = \mathcal{O}(\varepsilon)$$
  - 2C : $$K_w\, \mathcal{A}'' + \Lambda_f \left(-\omega^2 + (2\,\omega_2)^2\right) \mathcal{A} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$
  - 3C : $$K_w\, \mathcal{A}'' + 4\,\Lambda_f \left(\omega - \sqrt{3}\,\omega_2\right)^2 \mathcal{A} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Le concept de modulation : une généralisation de l'homogénéisation aux cas 'hautes fréquences'

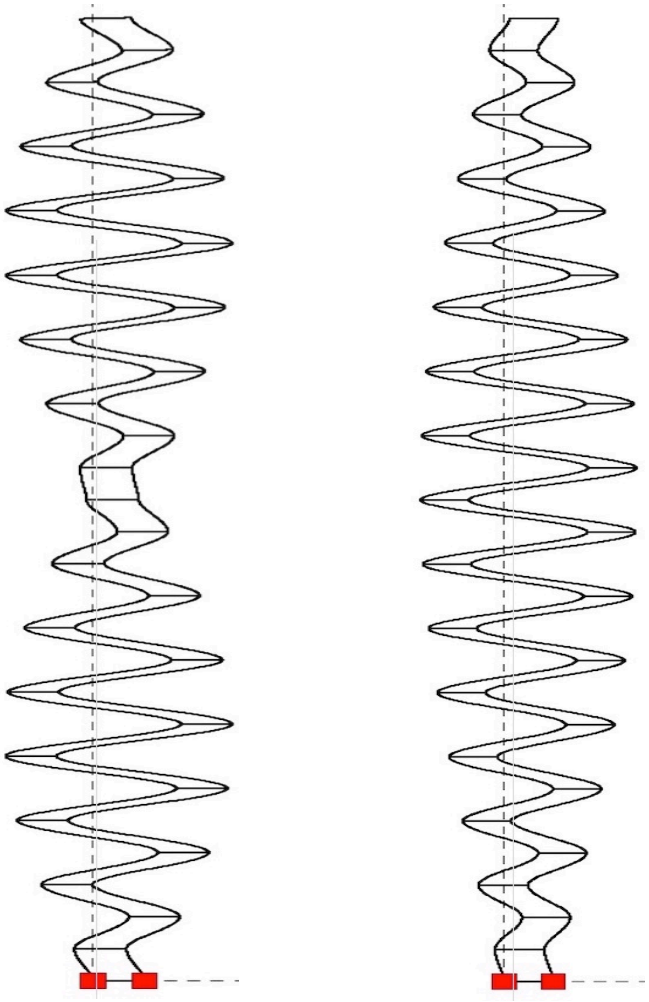
n = 30
l = 3m
am = 15 cm
ap= 67 cm
Acier E =210 GPa



0,2 Hz 0,9 Hz 1,8 Hz

Le concept de modulation : une généralisation de l'homogénéisation aux cas 'hautes fréquences'

2 Cellules

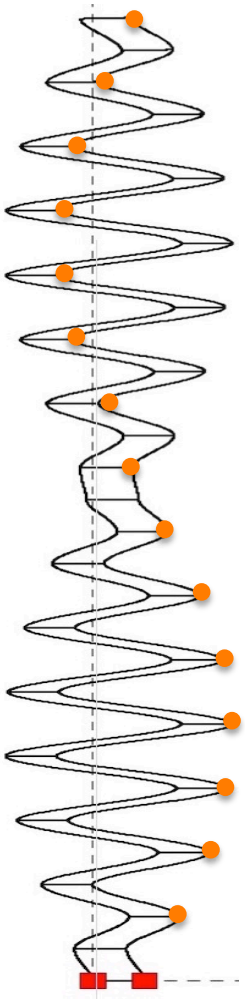


16,58 Hz

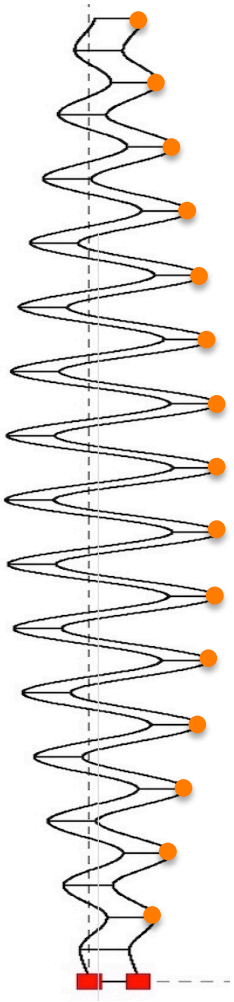
16,66 Hz

Le concept de modulation : une généralisation de l'homogénéisation aux cas 'hautes fréquences'

2 Cellules
= 1 mode
périodique



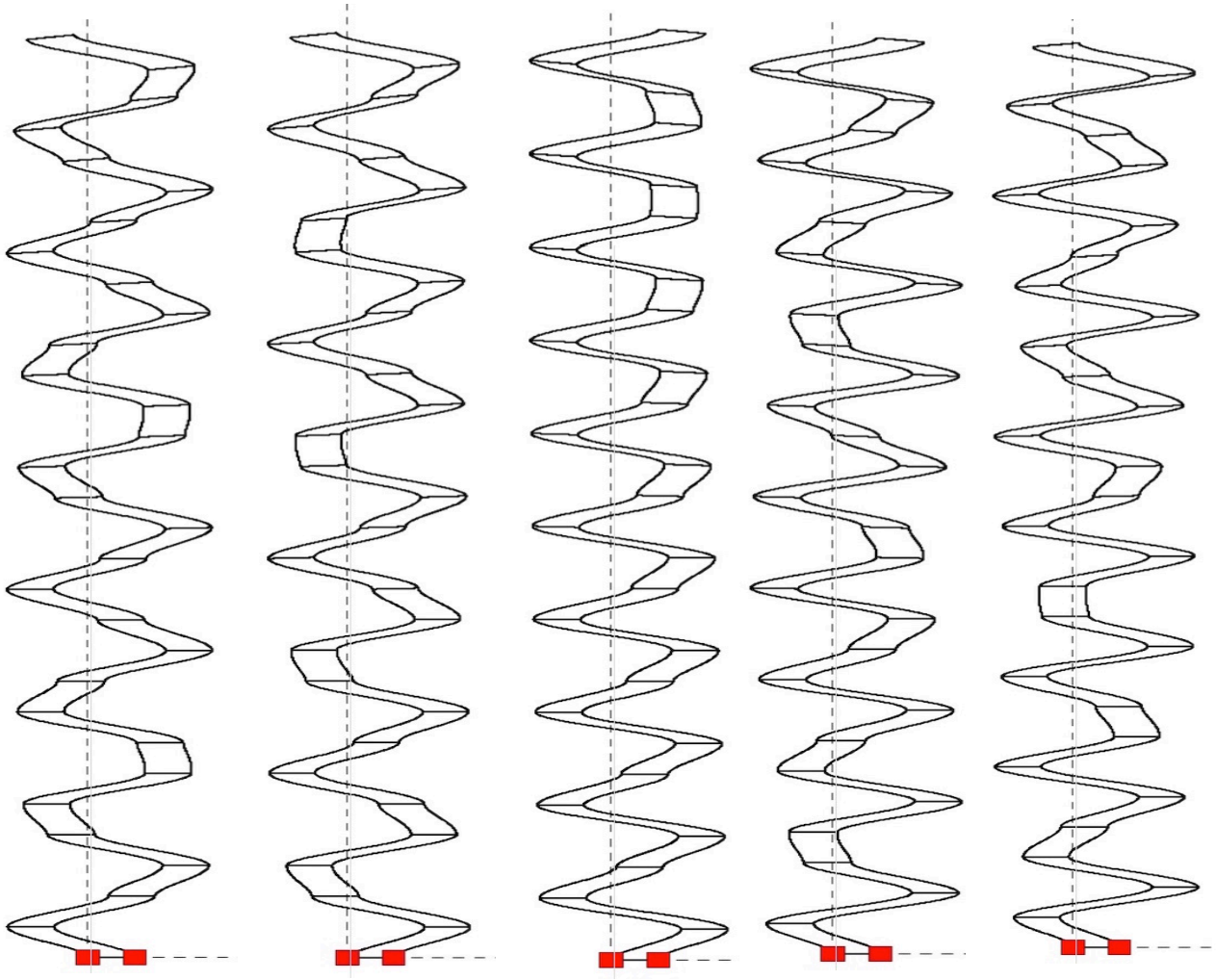
16,58 Hz



16,66 Hz

Le concept de modulation : une généralisation de l'homogénéisation aux cas 'hautes fréquences'

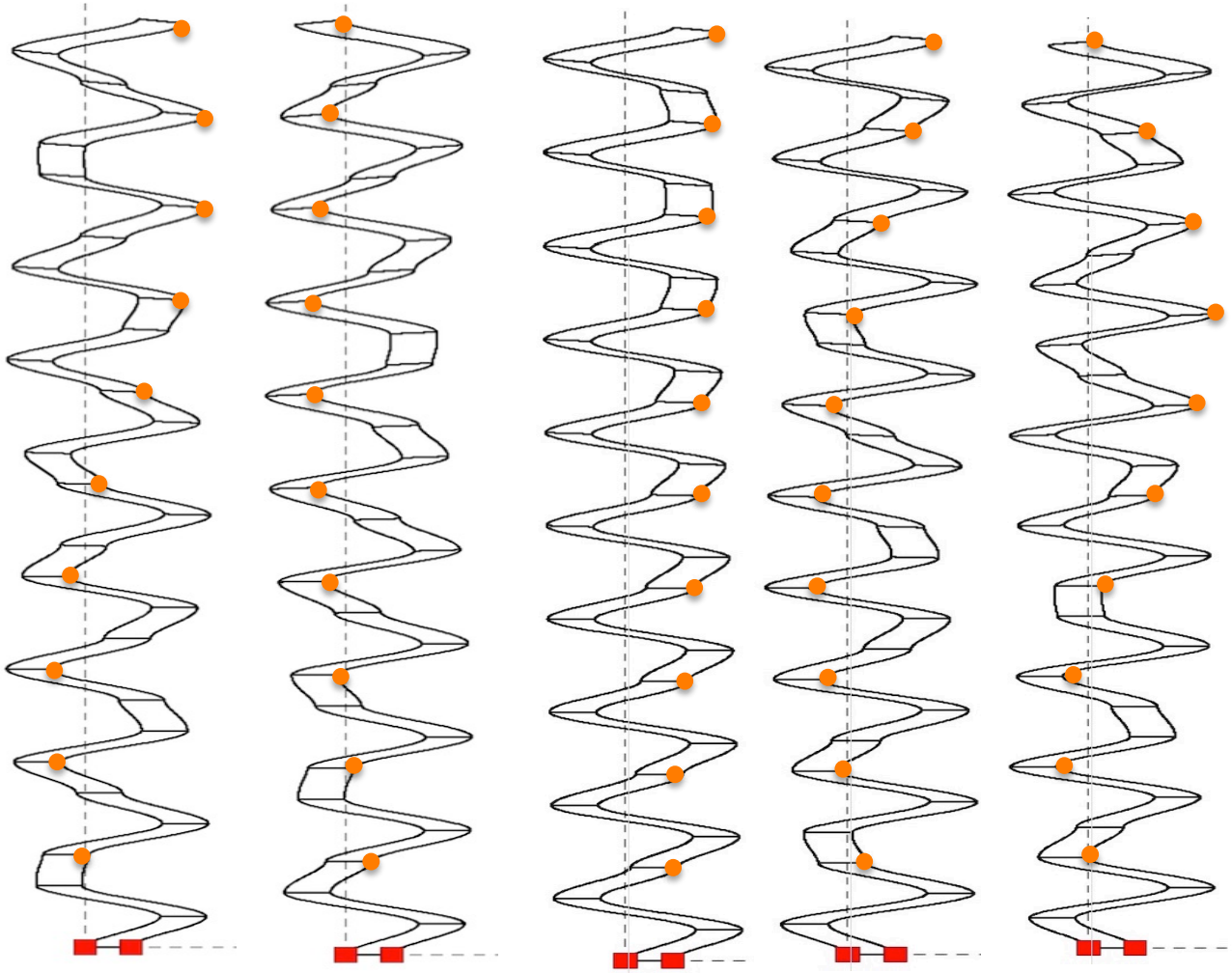
3 Cellules



13,1 Hz | 13,7 Hz | 14,2 Hz | 14,6 Hz | 15,0 Hz

Le concept de modulation : une généralisation de l'homogénéisation aux cas 'hautes fréquences'

3 Cellules =
2 modes
périodiques



13,1 Hz | 13,7 Hz | 14,2 Hz | 14,6 Hz | 15,0 Hz

Conclusions

- Homogénéisation / Modulation
  - Modèles et Cadre explicatif pour le fonctionnement des poutres / Milieux 2D
  - Modèles et Cadre explicatif pour les modes supérieurs
- Applications à l'ingénierie
  - Poutre et matériaux à comportement atypique et/ou dynamique interne
  - Transfert vers Conception / Dimensionnement
  - Bâtiments de grande hauteur

Publications associées

- HANS S., BOUTIN C., Dynamics of discrete framed structures: a unified homogenized description, Journal of Materials and Structures, vol. 3, n°9, pp 1709-1739, November 2008.
- CHESNAIS C., HANS S., BOUTIN, C., *Dynamics of reticulated structures. Evidence of atypical gyration modes*, Int. J. of Multiscale Computational Engineering, Vol.9 (5), pp.515-528, 2011.
- BOUTIN C., RALLU A., HANS S., Large scale modulation of high frequency acoustics waves in periodic porous media, JASA, 132(6), p. 3622-36. Doi : 10.1121/1.4763553, déc. 2012.
- CHESNAIS C., BOUTIN C., HANS S., Effects of the local resonance on the wave propagation in periodic frame structures: generalized Newtonian mechanics, JASA, vol.132 (4), pp. 2873-2886, 2012.
- CHESNAIS C, BOUTIN C, HANS S, Wave propagation and non-local effects in periodic frame materials: Generalized continuum mechanic, Mathematics and Mechanics of Solids published online 29 November 2013, DOI: 10.1177/1081286513511092.
- BOUTIN C., RALLU A., HANS S., Large scale modulation of high frequency waves in periodic elastic composites, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 10/2014; DOI: 10.1016/ j.jmps.2014.05.015
- C. Chesnais, C. Boutin , S. Hans, Effects of the local resonance in bending on the longitudinal vibrations of reticulated beams, Wave Motion 57 (2015) 1–22.