Simulation numérique de la propagation d'ondes dans les sols par une méthode éléments finis Galerkin discontinue

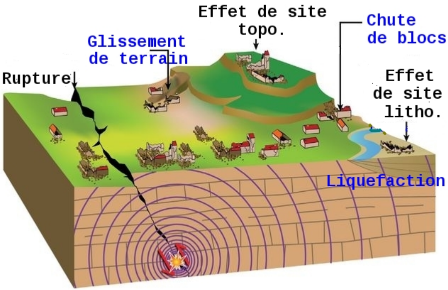
Nathalie Glinsky

IFSTTAR/GERS/SV - CEREMA/DTerMed/LN/SRS - INRIA Sophia Antipolis Méditerranée/EPI Nachos

Jeudi 4 Juin 2015

Objectif général

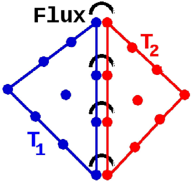
- Simulation numérique de la propagation des ondes sismiques
- Problème direct, étude de l'aléa et des effets de site
  - ▷ rapports site/référence, amplification et fréquences concernées



- Méthodes numériques précises
  - ▷ milieux complexes
  - ▷ modèles de rhéologie (du plus simple au plus réaliste)

La méthode éléments finis Galerkin discontinue

- Reed and Hill (1973), problème de transport de neutron
- Equations de l'élastodynamique
  - ▷ ADER flux décentrés, Käser and Dumbser, *GJI* (2006)
  - ▷ Saute-mouton flux centrés, Delcourte, Fezoui and Glinsky, *ESAIM: Proc* (2009)
- Méthode de type **éléments finis**
  - ▷ Discrétisation du domaine en triangles/tétraèdres T (ou autre),
  - ▷ Approximation de $\vec{W}$, $\vec{W}_h$, via une interpolation de Lagrange (ou autre)
- Méthode **discontinue**
  - ▷ Interpolation locale dans chaque cellule T_i, $L_{ij} \in P_p(T_i)$, polynômes de degré p de T_i



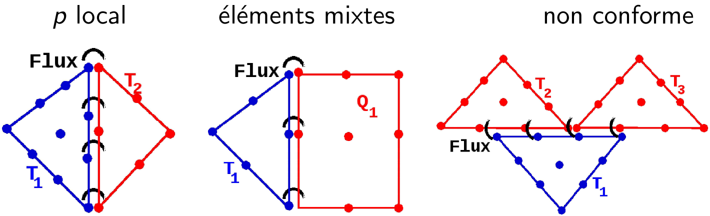
$$\vec{W}_{h|T_i} = \vec{W}_i(x,y,t) = \sum_{j=1}^{N} \vec{W}_{ij}(t)\, L_{ij}(x,y)\,,$$

N degrés de liberté dans T_i, $N = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$

- **Flux** aux interfaces

La méthode éléments finis Galerkin discontinue

- Avantages des méthodes GD
  - ▷ Ordre élevé en espace (matrices de masse locales, facilement inversibles)
  - ▷ Flexibilité (*h*-*p* adaptivité, maillages, pas de temps local)



  - ▷ Adaptées aux plateformes de calcul parallèlles

- Problèmes linéaires (en 2D)

$$\partial_t \vec{W} + A_x(\rho,\lambda,\mu)\partial_x \vec{W} + A_z(\rho,\lambda,\mu)\partial_z \vec{W} + B(\ldots)\vec{W} = \vec{0}$$

  - ▷ P1 à P5, flux centrés, schéma saute-mouton (standard, ordre 4)
  - ▷ ρ, V_p et V_s constants par élément

PARTIE I

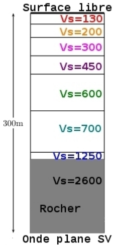
PRISE EN COMPTE DE L'ATTENUATION

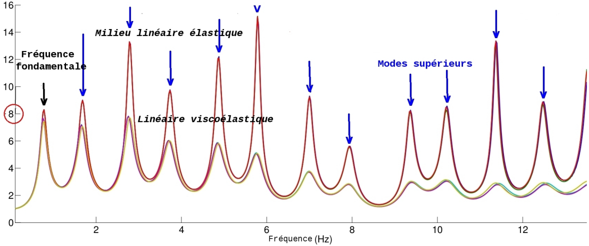
APPLICATION A l'ETUDE DES EFFETS DE SITE A NICE

Extrait de :
F. Peyrusse, N. Glinsky, C. Gélis and S. Lanteri [2014]
A nodal discontinuous Galerkin method for site effects assessment in viscoelastic media - verification and validation in the Nice basin,
Geophys. J. Int., **199**, 315-334.

Introduction de l'atténuation du milieu

- Hypothèse d'un milieu linéaire élastique non adaptée
- Fonctions de transfert (rapport spectral surface/référence)





- Remplacer la loi de Hooke entre contraintes et déformations

$$\sigma = \lambda\,\mathrm{tr}(\varepsilon)\,\mathrm{Id} + 2\mu\varepsilon\,, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

par une relation décrivant l'histoire de la déformation jusqu'à t

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi_{ijkl}(t-\tau)\,\partial_\tau \varepsilon_{kl}(\tau)\,d\tau\,,$$

ϕ tenseur des fonctions de relaxation

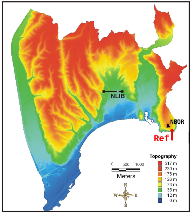
Introduction de l'atténuation du milieu

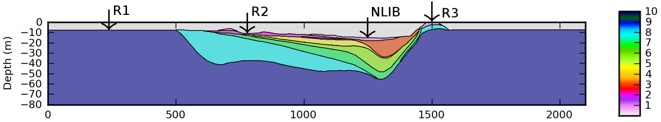
- Modèle de Maxwell généralisé (GMB, Emmerich & Korn, 1987)
- Relation σ-ε (convolution) $\approx$ EDPs des fonctions anélastiques ξ^l
- L (3 à 8) fréquences de relaxation ω_l dans l'intervalle de fréquences, facteur de qualité Q constant, coefficients anélastiques Υ^l
- Equations (cas linéaire élastique $l = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho \partial_t v & = & \nabla \cdot \sigma \,, \\ \partial_t \sigma & = & \lambda \, (\nabla \cdot v) \, \mathrm{Id} + \mu \, (\nabla v + \nabla v^T) - \sum_{l=1}^{L} \left(\lambda \, \Upsilon^{\lambda,l} \, \mathrm{tr}(\xi^l) \, \mathrm{Id} + 2\mu \, \Upsilon^{\mu,l} \, \xi^l \right) , \\ \partial_t \xi^l & = & \omega_l (\nabla v + \nabla v^T)/2 - \omega_l \, \xi^l, \quad l = 1, \ldots, L \,. \end{array} \right.$$

- $\partial_t \vec{W} + A_x \partial_x \vec{W} + A_z \partial_z \vec{W} + B \vec{W} = \vec{0}$ avec $\vec{W} = \left(\vec{V}, \vec{\sigma}, \vec{\xi^1}, .., \vec{\xi^L} \right)^t$, $\vec{V} = (v_x, v_y)^t$, $\vec{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^t$ and $\vec{\xi^l} = \left(\xi^l_{xx}, \xi^l_{yy}, \xi^l_{xy} \right)^t$
- $3\,L$ équations supplémentaires en 2D, $6\,L$ en 3D

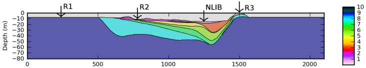
- Modèle de Nice (Bertrand *et al.*, 2007)
  - ▷ Topographie et milieu en profondeur, 10m de résolution
  - ▷ Bassin: $V_s \in [180;300]$ m/s, rocher : $V_s = 1000$ m/s
  - ▷ Pas de données sur Q, $Q_{P,S} = V_{p,s}/10$
- Coupe 2D, maillage non structuré, 107 707 triangles (h=1m/4m)
  - ▷ Milieu complexe $\Longrightarrow$ maillage fin $\Longrightarrow$ P1, $L = 3$ mécanismes
- Différences-finies (C. Gélis), $\Delta_{x,z}$ =0.125m, 10^6points, $L = 8$



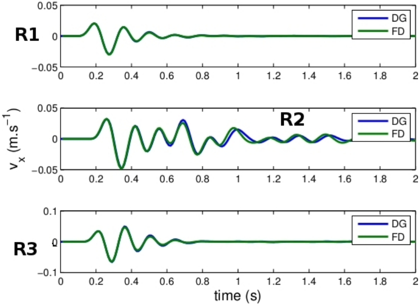


- Stations fictives R1, R2, R3 et NLIB (station du RAP)
- Onde plane SV verticale, $f_c = 6.0$Hz, $f_{max} = 12.0$ Hz

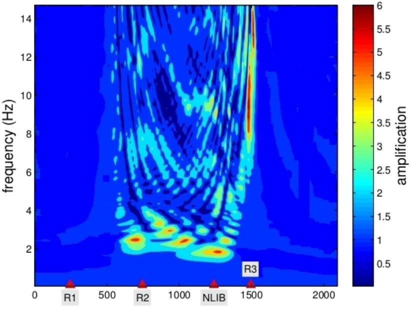
Application au bassin de Nice



- V_x en temps

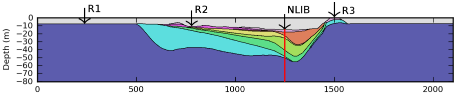


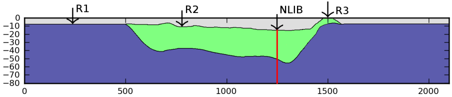
- En fréquence, $(V_x)_{surf}/(V_x)_{ref}$



Comparaisons 1D/2D, hétérogène/homogène en NLIB

- Simulations sur 2 configurations 2D, 2 configurations 1D
  - ▷ Bassin initial et version homogène (géométrie de fond de bassin)
  - ▷ Colonnes 1D hétérogène et homogène (34 m épaisseur), ligne rouge
  - ▷ Pour le cas homogène, valeur moyenne $V_s = 300$ m/s

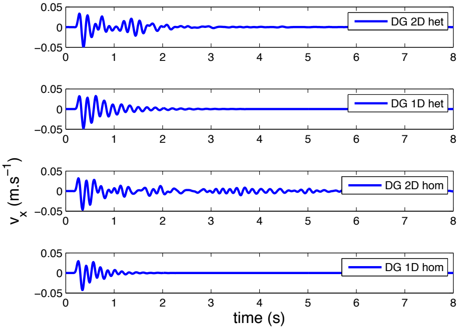




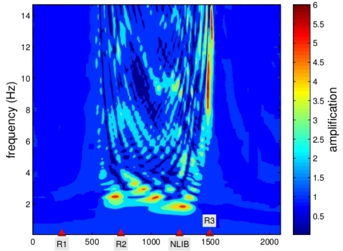
- Données réelles
  - ▷ étude sur les effets de site à Nice (stage M. Oyomo Olinga, 2007)
  - ▷ enregistrements en 6 stations du Réseau Accélerométrique Permanent
  - ▷ 14 séismes entre janv. 2000 et oct. 2006, magnitude 2.4 à 4.9
  - ▷ référence pour rapports spectraux, station NBOR

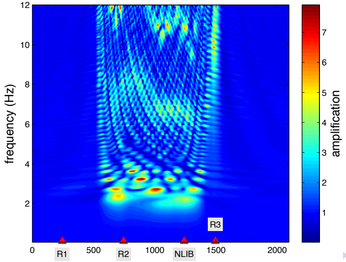
Comparaisons 1D/2D, hétérogène/homogène en NLIB

- V_x en temps, en NLIB

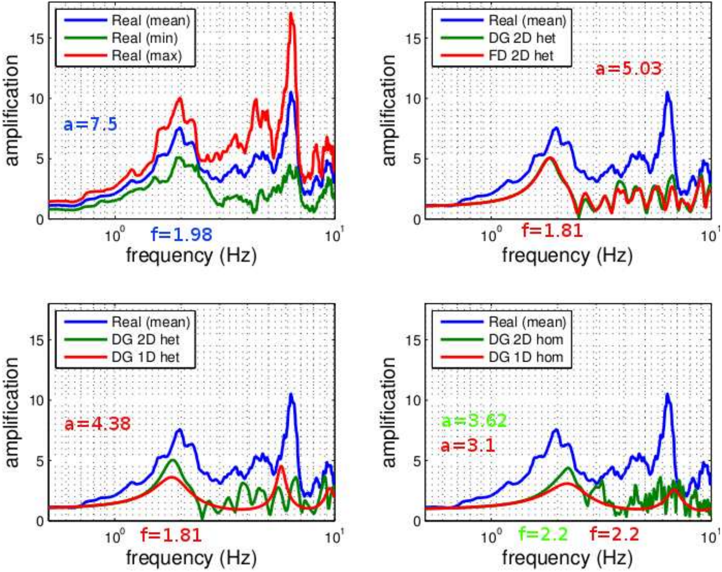


- En fréquence $(V_x)_{surf}/(V_x)_{ref}$





Comparaisons simulations / mesures en NLIB



PARTIE II

PRISE EN COMPTE PRECISE

DE MILIEUX HETEROGENES ARBITRAIRES

Extrait de :
D. Mercerat and N. Glinsky [2015]
A nodal high-order discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation in arbitrary heteogeneous media
Geophys. J. Int., **201**, 1099-1116.

Motivations

- Méthodes d'ordre élevé pour des maillages plus grossiers
- L'hypothèse de propriétés constantes par élément est une sévère limitation
  - ▷ milieu complexe $\longrightarrow$ construction complexe du maillage
  - ▷ hétérogénéités de petites dimensions $\longrightarrow$ maillages fins
  - ▷ schémas explicites en temps $\longrightarrow$ petits pas de temps $\longrightarrow$ temps de calcul élevé
- Objectifs : étendre avec peu de modifications la méthode GD
  - ▷ inclure des variations (gradient, saut) des propriétés du milieu à l'intérieur des éléments
  - ▷ meilleure approximation du milieu hétérogène (gradient),
  - ▷ construction du maillage facilitée (saut),
  - ▷ temps de calcul de la simulation réduit.

Méthode GD pour des milieux hétérogènes

- Système vitesses-contraintes, milieu linéaire élastique

$$\partial_t \vec{W} + A_x(\rho,\lambda,\mu)\ \partial_x \vec{W} + A_z(\rho,\lambda,\mu)\ \partial_y \vec{W} = \vec{0}\,,$$

- Eviter $\int_{T_i} L_i^t\, \partial_{x/z} A_{x/z}\ \vec{W}\, dV \Rightarrow \int_{T_i} L_i\, (\partial_{x/z} L)_j\, L_k\, dV$

(Castro *et al.*, Geophys. J. Int., 182(1), 250-264, 2010)

- Changement de variables sur les contraintes

$$\vec{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^t \quad \rightarrow \quad \vec{\tilde{\sigma}} = \left(\frac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}), \frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}), \sigma_{xy}\right)^t$$

$$\vec{W} = \left(\vec{V}, \vec{\sigma}\right)^t \quad \rightarrow \quad \vec{\tilde{W}} = \left(\vec{V}, \vec{\tilde{\sigma}}\right)^t$$

- Système équivalent en $\vec{\tilde{W}}$

$$\Lambda(\rho,\lambda,\mu)\, \partial_t \vec{\tilde{W}} + \tilde{A}_x\ \partial_x \vec{\tilde{W}} + \tilde{A}_z\ \partial_z \vec{\tilde{W}} = \vec{0}\,.$$

- $\tilde{A}_x$ et $\tilde{A}_z$ constantes, $\Lambda(\rho,\lambda,\mu) = diag\left(\rho, \rho, \frac{1}{\lambda+\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right)$
- Extension limitée au calcul de matrices de masse modifiée sur T_i

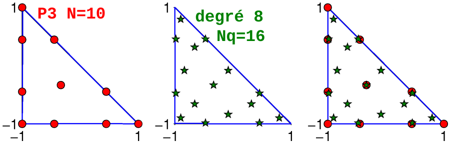
Méthode GD pour des milieux hétérogènes

- Matrices de masse modifiées

$$\int_{T_i} L_k^t \Lambda \, \partial_t \vec{\tilde{W}} \, dV = \sum_{j=1}^{N} d_t \vec{\tilde{W}}(t) \int_{T_i} L_k^t \Lambda \, L_j \, dV \, .$$

- Calcul des matrices de masse par des règles de quadratures
  - ▷ N_q points de quadratures et poids donnés par la librairie Dunavant
  - ▷ Précision des formules de Dunavant

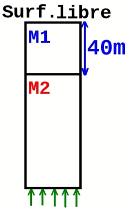
N_q	6	12	16	25	33	42
Ordre	4	6	8	10	12	14



N_q est un paramètre

- Matrices calculées à l'étape d'initialisation
- Stockage de l'inverse de 3 matrices par triangle

Application à une couche superficielle



	ρ kg/m^3	V_p m/s	V_s m/s
M1	1800	365	150
M2	2100	2450	1000

- Onde plane SV

f_c=2Hz, f_{max}=6Hz

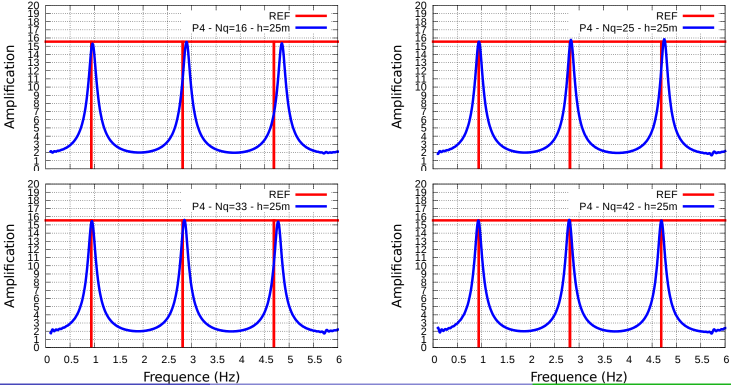
- $\text{Min}_\lambda \simeq 25\text{m} \Longrightarrow h$

- Solution exacte:

$a = 2(\rho V_s)_{M2}/(\rho V_s)_{M1}$

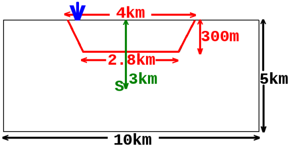
$f_n = (2n-1)V_s/(4H)$

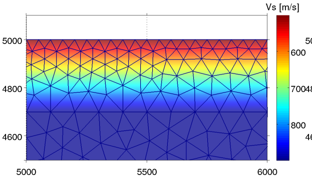
h(m)		CPU(s)
5	P2	572
20	P4	326
25	P4	[230;236]

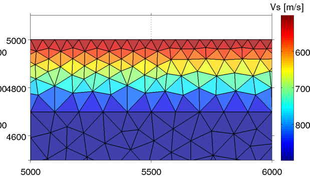


Source explosive dans un bassin trapézoïdal

- Bassin de géométrie simplifiée
  - ▷ bassin : $\rho = 2000$ kg/m^3, gradient $V_s \in [500, 900]$ m/s, $\nu = 0.25$
  - ▷ rocher: $\rho = 2600$ kg/m^3, Vs=2600 m/s, $\nu = 0.25$
  - ▷ rangée de capteurs surfaciques, en particulier en bord de bassin
- Source explosive à environ 3000m de profondeur
  - ▷ Ricker, $f_c = 4$Hz, $f_{max} = 10$Hz
  - ▷ Min$_\lambda \simeq 50$m
- Maillage contenant l'interface bassin/rocher
  - ▷ Maillage 5562 triangles, h=50m en surface, h=100m en fond de bassin
- Comparaisons Specfem (quadrangles)/DG (triangles)
- Comparaisons DG nouvelle approche/DG propriétés const./triangle



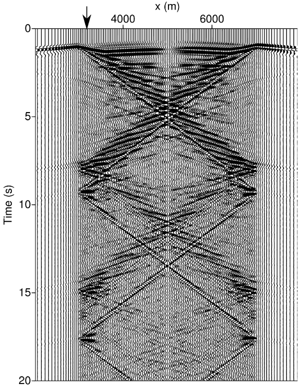




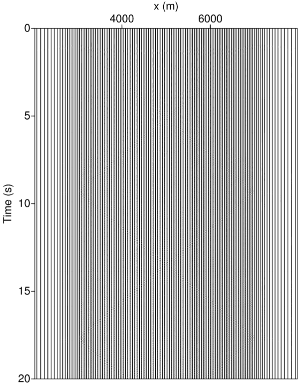
Source explosive dans un bassin trapézoïdal

- Le maillage suit l'interface bassin/rocher

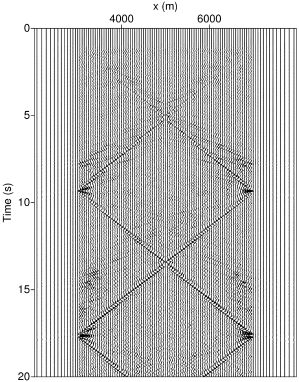
V_x



Différence SEM/DG
P5 Q33



Différence SEM/DG
P5 const./triangle

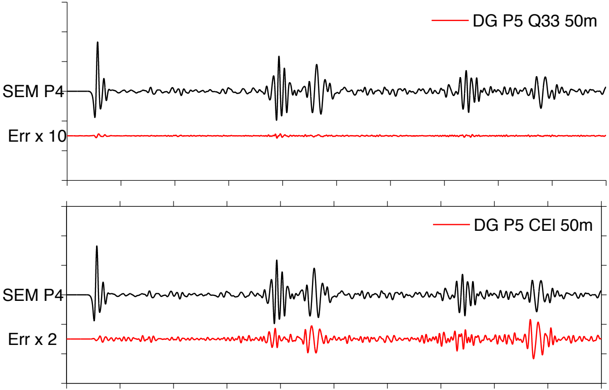


Source explosive dans un bassin trapézoïdal

- Le maillage suit l'interface bassin/rocher
- Zoom au capteur situé en bord de bassin

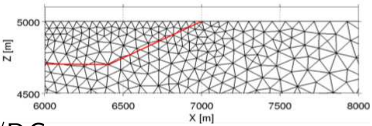
DG nouvelle méthode

DG constant/triangle

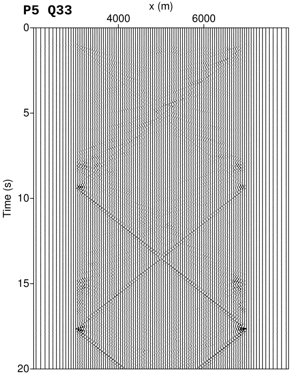


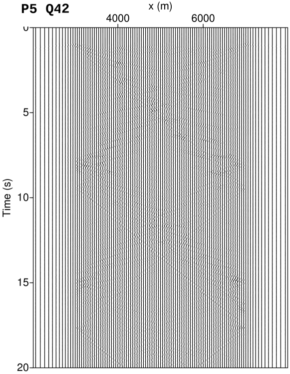
Source explosive dans un bassin trapézoïdal

- Le maillage ne suit plus l'interface bassin/rocher



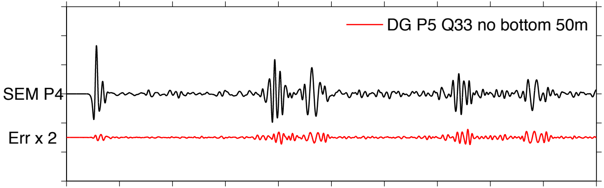
- Différences SEM/DG



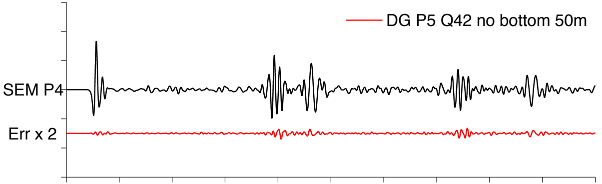


Source explosive dans un bassin trapézoïdal

- Le maillage ne suit plus l'interface bassin/rocher
- Zoom au capteur situé en bord de bassin



DG P5 $N_q = 33$



DG P5 $N_q = 42$

Merci de votre attention

Nathalie Glinsky
nathalie.glinsky@cerema.fr
Cerema DTerMed
Laboratoire de Nice
Service Risque Sismique
56 Bd Stalingrad
06359 Nice cedex 4