

# Modèles rapides pour la propagation des ondes mécaniques guidées: vers une application à la prévision des vibrations?

Fabien TREYSSÈDE

LUNAM Université, IFSTTAR, GERS/AI, 44344 Bouguenais, France

JTAV 2013, Blois, 23-24 mai 2013



# Plan

- 1 Introduction
  - Contexte initial: le CND des câbles
  - Complexité structurale
  - Un parallèle avec les ondes de surface en géophysique...
- 2 Méthode SAFE
- 3 Prise en compte des sources
- 4 Introduction d'inhomogénéités
- 5 Conclusion

## Contexte initial: le CND des câbles

### Contrôle non destructif des câbles de ponts

#### détection de défauts dans les torons...

Avantage des ondes guidées:

- propagation sur de longues distances
- sensibilité à des défauts de petites tailles (ondes 'HF')

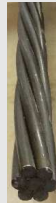
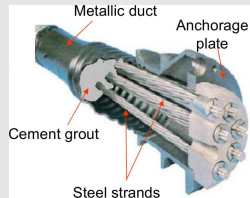


Figure: Left: anchorage zone (single access  $\Rightarrow$  reflectometry), right: 6+1 strand.

# Contexte initial: le CND des câbles

## Contrôle non destructif des câbles de ponts

détection de défauts dans les torons...

Avantage des ondes guidées:

- propagation sur de longues distances
- sensibilité à des défauts de petites tailles (ondes 'HF')

Inconvénients:

- dispersives
- multimodales

*Chaque mode guidée possède sa propre vitesse de propagation... qui dépend de la fréquence*

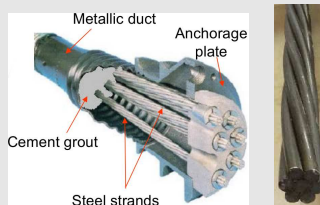


Figure: Left: anchorage zone (single access  $\Rightarrow$  reflectometry), right: 6+1 strand.

Physique complexe

**Modélisation quasi-indispensable pour optimiser les techniques d'inspection**

# Complexité structurale

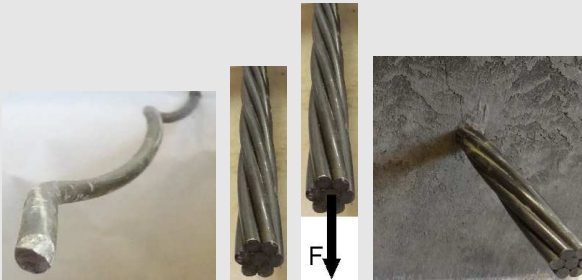
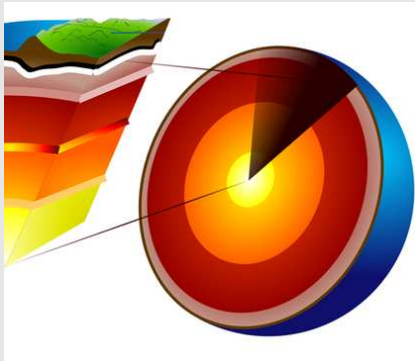


Figure: Courbure (hélice), couplage inter-brins, précontrainte, **enrobage**

guides enrobés  $\simeq$  guides non bornés dans leur section transverse (**guides ouverts**)

# Un parallèle avec les ondes de surface en géophysique...

- Sols  $\simeq$  guides ouverts
- Exemple de la surface de la Terre:



**Figure:** Courbure (sphère), couplage (multicouche), précontrainte (gravité), profondeur  $\simeq$  infinie

# Plan

- 1 Introduction
- 2 **Méthode SAFE**
  - Principe général
  - Modélisation des guides ouverts
- 3 Prise en compte des sources
- 4 Introduction d'inhomogénéités
- 5 Conclusion

# Principe général

## Méthode des éléments finis semi-analytique (SAFE)

Formulation variationnelle de l'élastodynamique:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV = 0$$

On suppose:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}$$

Discrétisation par éléments finis en  $(x, y)$ :

### Problème aux valeurs propres

$$\{\mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{M} + ik(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) + k^2 \mathbf{K}_3\} \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

- problème restreint à la section: **2D**
- résolution pour chaque fréquence  $\omega$
- pour un  $\omega$  donné, solution = modes guidés  $(k_n^{\pm}, \mathbf{U}_n^{\pm})$

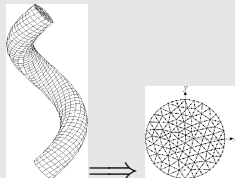


Figure: guide 3D → section 2D



# Principe général

## Méthode des éléments finis semi-analytique (SAFE)

Formulation variationnelle de l'élastodynamique:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV = 0$$

On suppose:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}$$

Discrétisation par éléments finis en  $(x, y)$ :

### Problème aux valeurs propres

$$\{\mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{M} + ik(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) + k^2 \mathbf{K}_3\} \mathbf{U} = 0$$

- problème restreint à la section: **2D ou 1D**
- résolution pour chaque fréquence  $\omega$
- pour un  $\omega$  donné, solution = modes guidés  $(k_n^{\pm}, \mathbf{U}_n^{\pm})$

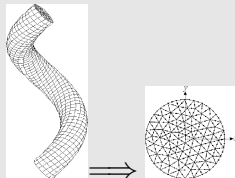


Figure: guide 3D → section 2D

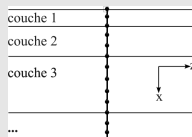


Figure: guide 2D → section 1D

# Modélisation des guides ouverts

*Physique assez différente des guides fermés...*

## 3 types de modes:

- modes piégés (e.g. ondes de Rayleigh)
- modes à fuite ('leaky')
- modes de rayonnement (continuum)

## Difficultés numériques:

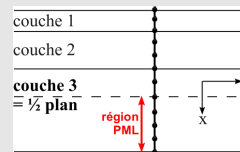
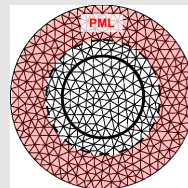
- section non bornée
- croissance transverse des modes à fuite...

## Technique adoptée:

### SAFE+PML (Perfectly Matched Layers)

- coordonnée(s) transverse(s) complexe(s):  

$$\tilde{x} = \int_0^x \gamma(s) ds$$
- changement de variables dans SAFE:  $\tilde{x} \mapsto x$
- Seules différences au final:
  - matrices complexes
  - plus de modes à calculer ('continuum')



**Figure:** modélisation de guides 3D (haut) et 2D (bas) ouverts par SAFE-PML

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Méthode SAFE
- 3 Prise en compte des sources**
  - Calcul de réponse
  - Sources 3D en milieux stratifiés
- 4 Introduction d'inhomogénéités
- 5 Conclusion

# Calcul de réponse

Réponse de guides ouverts: en cours d'étude...

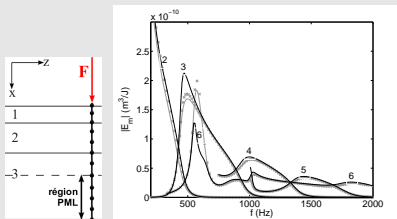


Figure: 2 cas tests: chaussée multicouche (Ryden, JASA2004)

- Décomposition modale:  $\mathbf{U}(z; \omega) = \sum_{n=1}^N \alpha_n(\omega) \mathbf{U}_n(\omega) e^{ik_n(\omega)z}$
- Transformée de Fourier inverse:  $\mathbf{U}(z; \omega) \rightarrow \mathbf{U}(z; t)$

Obtention des coefficients  $\alpha_n$ : par biorthogonalité

$$\alpha_n = \frac{\mathbf{U}_{-n}^T \tilde{\mathbf{F}}(k_n)}{\mathbf{U}_n^T \mathbf{F}_{-n} - \mathbf{U}_{-n}^T \mathbf{F}_n}$$

→ post-traitement rapide (aucune inversion requise)

# Calcul de réponse

Réponse de guides ouverts: en cours d'étude...

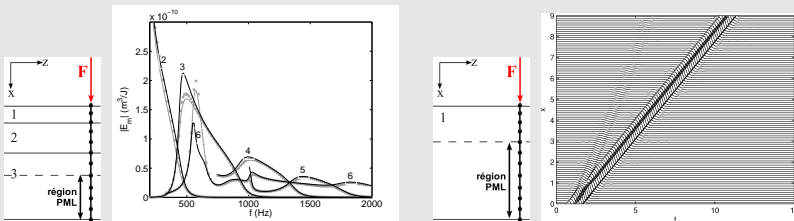


Figure: 2 cas tests: chaussée multicouche (Ryden, JASA2004) et 1/2 espace

- Décomposition modale:  $\mathbf{U}(z; \omega) = \sum_{n=1}^N \alpha_n(\omega) \mathbf{U}_n(\omega) e^{ik_n(\omega)z}$
- Transformée de Fourier inverse:  $\mathbf{U}(z; \omega) \rightarrow \mathbf{U}(z; t)$

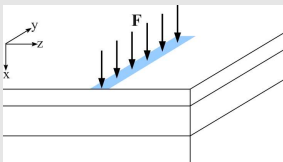
Obtention des coefficients  $\alpha_n$ : par biorthogonalité

$$\alpha_n = \frac{\mathbf{U}_{-n}^T \tilde{\mathbf{F}}(k_n)}{\mathbf{U}_n^T \mathbf{F}_{-n} - \mathbf{U}_{-n}^T \mathbf{F}_n}$$

→ post-traitement rapide (aucune inversion requise)

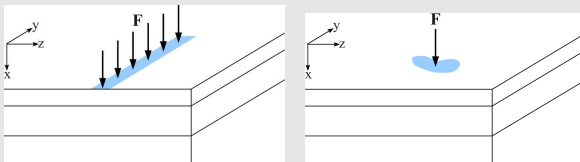
# Sources 3D en milieux stratifiés

Problème: guide 2D  $\Rightarrow$  réponse 2D, **source=ligne hors plan**



## Sources 3D en milieux stratifiés

Problème: guide 2D  $\Rightarrow$  réponse 2D, **source=ligne hors plan**

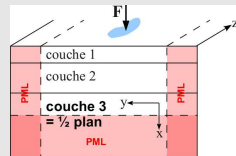


Réponse avec sources 3D quelconques (e.g. source ponctuelle)

- TF2D, coordonnées polaires, Formules de Bessel, Transformées de Hankel, calcul de résidus... technique mais résultats assez compacts!
- validation théorique, solutions en cours d'implémentation

Autre possibilité (?):

- modèle = section 2D entourée de PML ( $\rightarrow$ guide 3D)
- calcul de modes plus coûteux que guides 2D



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Méthode SAFE
- 3 Prise en compte des sources
- 4 Introduction d'inhomogénéités**
  - Méthode hybride FE-SAFE
- 5 Conclusion



# Méthode hybride FE-SAFE

Méthode SAFE seule: hypothèse = structure invariante par translation selon  $z$ ...  
→ *Hybridation entre méthodes éléments finis classique et SAFE*

- Système éléments finis initial (3D,2D):

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

- Partitionnement des ddl des sections  $\Sigma$  (2D,1D):

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_\Sigma \\ \mathbf{U}_{\bar{\Sigma}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_\Sigma \\ \mathbf{F}_{\bar{\Sigma}} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \bar{\Sigma} = \Omega \setminus \Sigma$$

Décomposition modale sur  $\Sigma$  (conditions transparentes)

$$\mathbf{U}_\Sigma = \sum_{n=1}^N \alpha_n^- \mathbf{U}_n^- + \sum_{n=1}^N \alpha_n^+ \mathbf{U}_n^+, \quad \text{Idem pour } \mathbf{F}_\Sigma$$

⇒ calculs (3D,2D) restreints autour des inhomogénéités

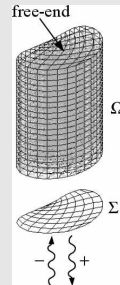
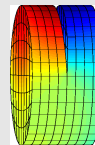


Figure: guides 3D, bord libre (haut) et fissure (bas)



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Méthode SAFE
- 3 Prise en compte des sources
- 4 Introduction d'inhomogénéités
- 5 Conclusion**
  - Perspectives pour la géophysique
  - Bilan

## Perspectives pour la géophysique (subsurface)

- interaction ondes de surface avec cavités, continent/océan
- ondes de surface et suivi des digues
- ...

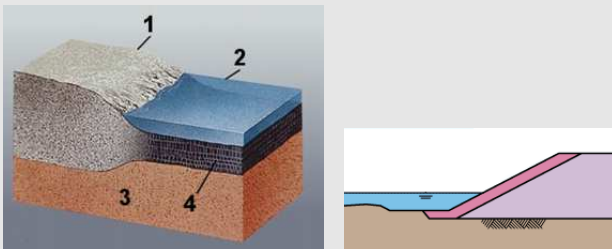


Figure: schémas simplifiés de la croûte terrestre (continent/océan) et d'une digue (coupe)

- Intérêts pour la problématique des vibrations dans les sols ?

# Bilan sur la méthode

## Potentialités de SAFE:

- hétérogénéité transverse arbitraire (multicouche, continûment variable)
- viscoélasticité
- anisotropie
- inhomogénéité axiale par hybridation FE-SAFE...

## Avantages:

- cumule la souplesse du numérique et la rapidité de l'analytique
- interprétation physique aisée (formalisme modal)
- calculs de réponse ultra-rapides si on ne change que la source...

## Limitations:

- linéaire
- PML (à dimensionner)
- peu utile s'il n'existe aucune invariance...